



**Уральский  
федеральный  
университет**

имени первого Президента  
России Б.Н.Ельцина

**Институт новых материалов  
и технологий**

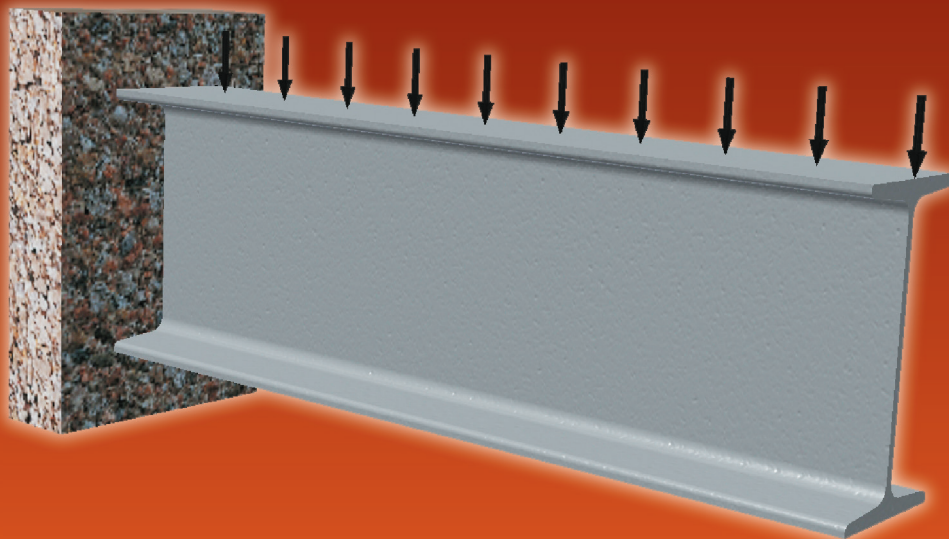
**Л. П. ВЯЗКОВА  
Л. В. МАЛЬЦЕВ  
С. В. ПАРЫШЕВ**

# **ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ**

## **В 2 частях**

### **Часть 2**

**Учебное пособие**





Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. П. Вязкова  
Л. В. Мальцев  
С. В. Парышев

# **ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ**

В 2 частях

Часть 2

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся  
по направлениям подготовки:  
14.05.02 — Атомные станции: проектирование,  
эксплуатация и инжиниринг;  
13.03.02 — Электроэнергетика и электротехника;  
13.03.01 — Теплоэнергетика и теплотехника

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2019

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251я73

В99

Рецензенты:

кафедра «Технология металлов и ремонт машин» Уральского государственного аграрного университета (завкафедрой доц., канд. техн. наук *В. А. Александров*); проф., канд. техн. наук *Э. А. Бубнов* (Уральский государственный архитектурно-художественный университет)

Научный редактор доц., канд. техн. наук *В. П. Новоселов*

**Вязкова, Л. П.**

**В99** Основы расчетов прочностной надежности. В 2 частях. Часть 2 : учебное пособие / Л. П. Вязкова, Л. В. Мальцев, С. В. Парышев ; Мин-во науки и высшего образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 176 с.

ISBN 978-5-7996-2787-4 (ч. 2)

ISBN 978-5-7996-2785-0

Издание представляет собой вторую часть учебного пособия, в которую вошли такие темы, как плоский поперечный изгиб, теория прочности, сложное сопротивление. Пособие соответствует программам обучения и требованиям государственных образовательных стандартов, а также программам курсов «Механика», «Детали машин и основы конструирования», «Техническая механика», «Прикладная механика». Предназначено для студентов, выполняющих курсовые проекты, курсовые работы, расчетно-графические работы и домашние задания по разделам «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов» названных курсов. Приведены билеты для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов.

Библиогр.: 11 назв. Табл. 11. Рис. 59.

УДК 539.3(075.8)

ББК 22.251я73

---

*Учебное издание*

**Вязкова Людмила Павловна, Мальцев Лев Витальевич, Парышев Сергей Владимирович**

## **ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ**

В 2 частях

Часть 2

Редактор И. В. Коршунова  
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 11.11.2019. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 14,2.  
Уч.-изд. л. 8,30. Тираж 40 экз. Заказ 327.

Издательство Уральского университета. Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5. Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41. E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4. Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13. Факс: +7 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>

ISBN 978-5-7996-2787-4 (ч. 2)

ISBN 978-5-7996-2785-0

© Уральский федеральный  
университет, 2019



---

# Оглавление

---

<b>Предисловие .....</b>	<b>5</b>
<b>5. Плоский поперечный изгиб .....</b>	<b>6</b>
5.1. Общие положения.....	6
5.2. Внутренние силовые факторы при изгибе .....	9
5.3. Напряжения при чистом изгибе .....	14
5.4. Осевые моменты инерции и моменты сопротивления .....	20
5.5. Расчет на прочность при чистом изгибе .....	23
5.6. Расчет на прочность при поперечном изгибе .....	24
5.7. Деформации при изгибе и расчеты балок на жесткость.....	26
Задания для самопроверки.....	40
<b>6. Напряженное и деформированное состояние в точке. Теория прочности .....</b>	<b>42</b>
6.1. Напряженное и деформированное состояние в точке .....	42
6.2. Потенциальная энергия деформации .....	47
6.3. Теория прочности .....	48
<b>7. Сложное сопротивление. Изгиб с кручением.....</b>	<b>53</b>
Задание для самопроверки .....	76
<b>8. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях .....</b>	<b>78</b>
Задание для самопроверки .....	104

<b>Задания .....</b>	<b>105</b>
1. Плоский поперечный изгиб .....	105
2. Сложное сопротивление. Изгиб с кручением.....	121
3. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях	138
 <b>Билеты для текущего контроля знаний .....</b>	<b>146</b>
Плоский поперечный изгиб .....	146
 <b>Рекомендуемый библиографический список .....</b>	<b>176</b>

---

## Предисловие

---

Учебное пособие составлено в соответствии с программами дисциплин «Механика», «Детали машин и основы конструирования», «Техническая механика», «Прикладная механика» для студентов технологических специальностей всех форм обучения.

Пособие может быть использовано при изучении теоретических курсов, а также при выполнении курсовых работ и проектов.

Опыт преподавания по данным дисциплинам показывает, что наибольшие затруднения у студентов связаны с решением задач. Следует заметить, что именно выполнение практической работы помогает студентам глубже и прочнее усвоить основные теоретические положения, разобраться в методах расчета конструкций, работающих при различных видах нагрузений.

Для лучшего усвоения материала приведены теоретические предпосылки решения задач по основным темам курса.

Примеры решения предложены в том виде, в каком они должны быть представлены в студенческих работах.

Особая методическая составляющая приведена в дополнительном тексте, в котором для самостоятельной работы в системе самоконтроля размещены задания по темам: равновесие тела под действием плоской системы сил, растяжение и сжатие, кручение, плоский поперечный изгиб, сложное сопротивление и прочность при циклически изменяющихся напряжениях — и билеты для текущего контроля знаний.

---

## 5. Плоский поперечный изгиб

---

### 5.1. Общие положения

---

**В**ид деформации бруса, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты, называют изгибом. Теория изгиба построена на следующих допущениях:

- геометрическая ось бруса — прямая линия;
- нагрузки на расчетной схеме сводятся к сосредоточенным силам  $F$ , сосредоточенным моментам  $M$ , распределенным нагрузкам интенсивностью  $q$  на длине действия распределенной нагрузки;
- внешние силы (нагрузки), изгибающие брус, лежат в одной плоскости, проходящей через геометрическую ось бруса. Все нагрузки перпендикулярны к геометрической оси бруса. Искривление оси происходит в той же плоскости;
- поперечные сечения бруса, плоские до деформации изгиба, остаются плоскими и после деформации;
- деформации бруса невелики по сравнению с размерами бруса.

На рис. 5.1 показан прямой брус, зафиксированный в опоре и нагруженный системой внешних сил, лежащих в одной плоскости. Внешняя нагрузка перпендикулярна к продольной оси бруса  $X$  и расположена в плоскости  $XU$ .

Брус, испытывающий деформацию изгиба, в дальнейшем будем называть балкой.

Для системы координат, показанной на рис. 5.1, изгибающий момент от нагрузок, расположенных в плоскости  $XU$ , действует относительно оси  $Z$ , а перерезывающая сила — по направлению оси  $Y$ .

В результате действия внешних силовых факторов в поперечных сечениях бруса возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_z$  относительно оси  $Z$ .

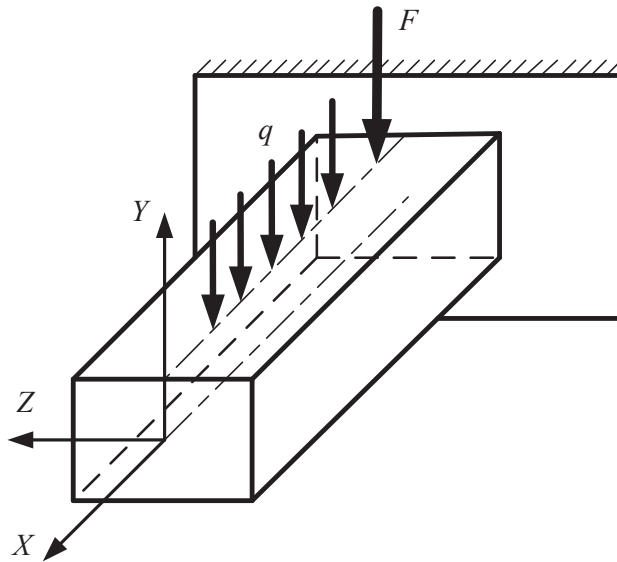


Рис. 5.1

Чистый изгиб имеет место при нагружении балки двумя равными противоположно направленными моментами, приложенными к торцам балки (рис. 5.2, а). В этом случае в поперечных сечениях балки возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент  $M_z$ .

Если в поперечных сечениях балки одновременно с изгибающим моментом действует также поперечная сила, то изгиб называют поперечным (рис. 5.2, б).

На рис. 5.3 показаны возможные поперечные сечения балок, работающих на изгиб. Оси  $X$ ,  $Y$  — центральные, проходящие через центр тяжести фигур. Поперечные сечения балок имеют одну (или две) ось симметрии.

В тех случаях, когда нагрузка (моменты, сосредоточенные и распределенные силы) расположена в одной плоскости, изгиб называется *плоским*.

Если поперечная нагрузка действует так, что плоскость ее действия совпадает с плоскостью, содержащей одну из главных центральных осей инерции сечений, то изгиб называется *прямым*. В противном случае изгиб называют *косым*.

Для балок с формами поперечного сечения в виде прямоугольника и двутавра (рис. 5.3, а, г) изгиб является прямым, если плоскость нагружения совпадает с осями  $Z$  и  $Y$ .

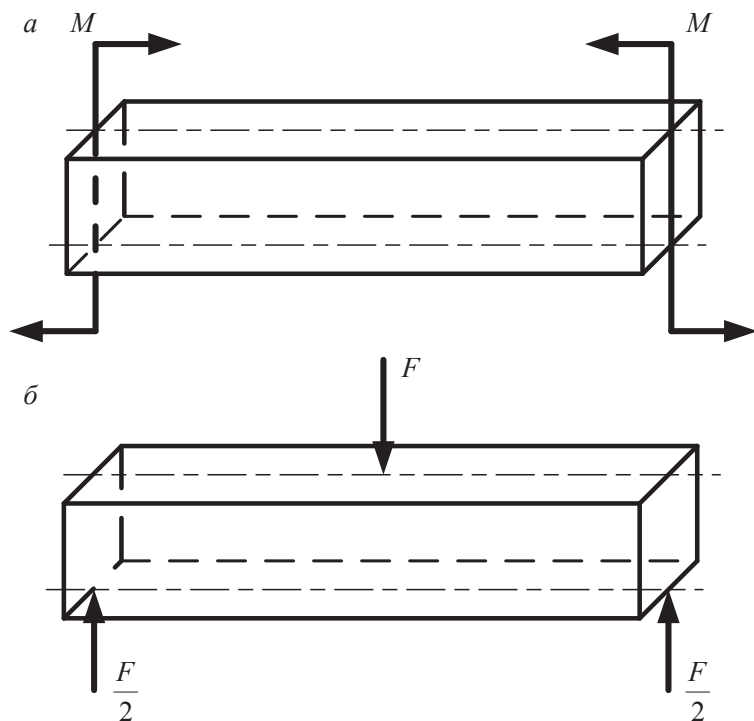


Рис. 5.2

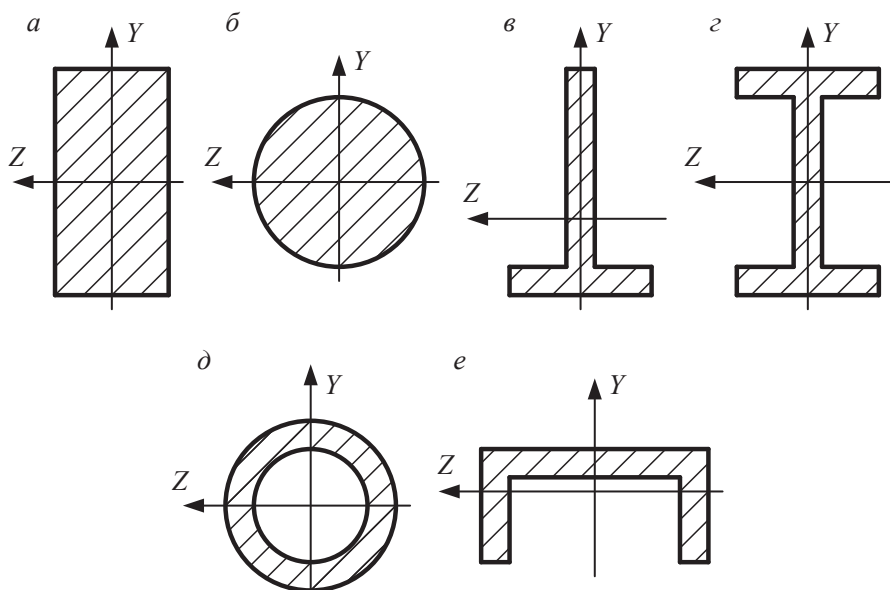


Рис. 5.3

Для балок таврового сечения (рис. 5.3, в) и сечения типа швеллер (рис. 5.3, е) изгиб будет прямым только в том случае, если плоскость нагружения совпадает с осью  $Y$ . Круглое и кольцевое сечения (рис. 5.3, б, д) симметричны относительно любой центральной оси. Если плоскость нагружения проходит через центр тяжести сечения, изгиб является прямым.

В настоящем пособии рассматривается изгиб плоский поперечный прямой.

## 5.2. Внутренние силовые факторы при изгибе

Для расчета прочностной надежности (расчета на прочность и жесткость) необходимо определить внутренние силовые факторы.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. Все силы должны быть приведены к оси балки. Силовая плоскость действия нагрузок должна совпадать с плоскостью чертежа.

Изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q$  определяются методом сечений.

Изгибающий момент  $M_z$  в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил и пар сил, действующих справа или слева от сечения относительно центра данного сечения.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении будем считать положительным, если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, расположенных слева от сечения, дает равнодействующий момент, направленный по движению часовой стрелки (или алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, расположенных справа от сечения, дает равнодействующий момент, направленный против движения часовой стрелки). То есть изгибающий момент считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз. В противном случае момент отрицателен (рис. 5.4).

Изгибающий момент  $M_{\text{и}}$  считается положительным, если элемент балки изгибается выпуклостью вниз, т. е. его сжатые волокна расположены в верхней части. На рис. 5.4 представлены направления  $M_{\text{и}}$ , принятые за положительные и отрицательные.

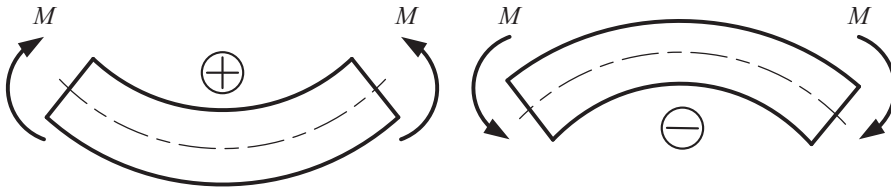


Рис. 5.4

Продольные волокна на выпуклой части балки удлиняются, на вогнутой части — укорачиваются.

Совокупность волокон, не меняющих своей длины при изгибе балки, называется нейтральным слоем.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется нейтральной осью (линией) сечения.

Графики, показывающие закон изменения  $Q$  и  $M$  по длине балки, называются *эпюрами*.

Поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M_i$  изображаются графически в виде эпюр. При плоском поперечном изгибе балки ее ось располагается в силовой плоскости. Для изгиба характерны два вида деформаций:

- искривление продольной оси бруса  $X$ , соответствующее перемещениям точек оси бруса в направлении  $Y$ ;
- поворот в пространстве одного поперечного сечения относительно другого, то есть поворот сечения относительно оси  $Z$  в плоскости  $XU$ .

*Поперечная сила* — внутренняя сила, перпендикулярная оси балки и численно равная сумме внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих справа или слева от данного сечения на ось  $Y$ , нормальную к продольной оси балки.

Для поперечных сил принято следующее правило знаков (рис. 5.4):

- поперечная сила в рассматриваемом сечении балки считается положительной, если равнодействующая всех внешних сил, расположенных слева от сечения, направлена вверх (или равнодействующая всех внешних сил, расположенных справа от сечения, направлена вниз);



- в противном случае поперечная сила в рассматриваемом сечении отрицательна.

Правило знаков для  $Q$  и  $M_{\text{и}}$  носит условный характер.

Поперечные силы  $Q$  считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент балки по часовой стрелке. На рис. 5.5 показаны положительные и отрицательные направления  $Q$ .

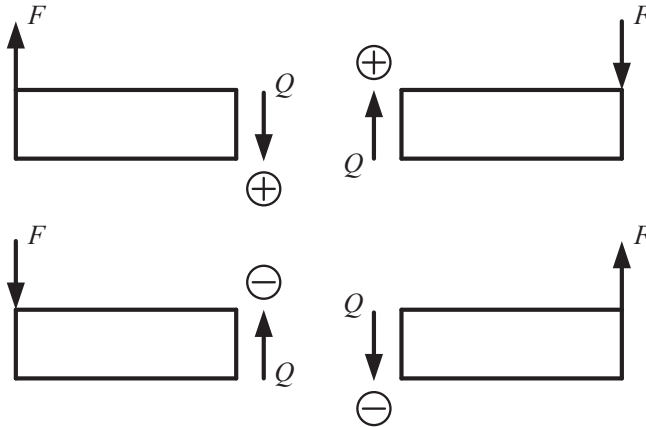


Рис. 5.5

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную произвольной системой сил (рис. 5.6, а).

Обозначим левую шарнирно-подвижную опору  $A$ , правую —  $B$ . Выберем систему ортогональных координат. Начало системы координат совместим с левой опорой  $A$ .

Направим ось  $X$  вдоль продольной оси балки.

На основании гипотезы освобождаемости от связей отбросим опоры и заменим их реакциями (рис. 5.6, б).

Из условия статического равновесия определим реакции  $A_y$  и  $B_y$ . Реакция  $A_x = 0$ , так как  $\sum F_{xi} = 0$ .

Разобьем балку на участки I... IV, приняв за границы участков сечения, в которых:

- приложены сосредоточенные силы или моменты;
- начинается либо заканчивается действие распределенной нагрузки.

Участок I имеет границы  $0 \leq x < a$ , участок II —  $0 \leq x < a + b$  и т.д.

В пределах каждого из участков внутренние силы изменяются по единому закону.

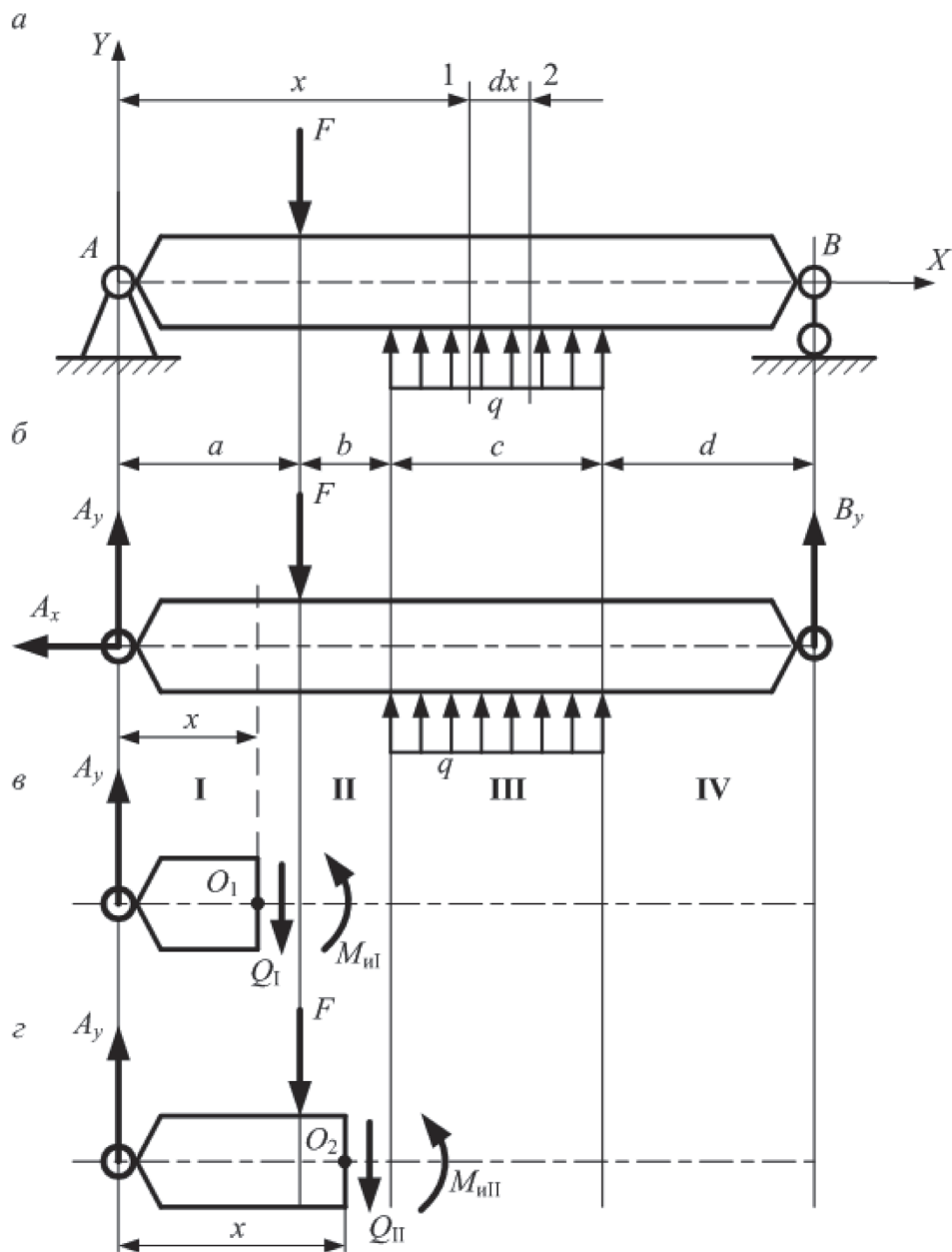


Рис. 5.6

Внутренние силовые факторы определяются методом сечений.

Мысленно рассечем балку на расстоянии  $x$  от ее левого конца на участке I (рис. 5.6, *в*), отбросим правую часть и рассмотрим равно-

весие оставшейся левой части. Для того чтобы оставшаяся часть находилась в равновесии, все внутренние силы должны сложиться в силу  $Q_1$ , перпендикулярную оси, и пару сил с моментом  $M_{и1}$ . Из условия равновесия:

- $\sum F_{yi} = 0$ ; отсюда  $A_y - Q_1 = 0$  и  $Q_1 = A_y$ ;
- $\sum M_{iO1} = 0$ ; отсюда  $-A_y x + M_{и1} = 0$  и  $M_{и1} = A_y x$ .

Выполним аналогичные действия на участке II (см. рис. 5.6, з):

- $\sum F_{yi} = 0$ ; отсюда  $A_y - F - Q_{II} = 0$  и  $Q_{II} = A_y - F$ ;
- $\sum M_{iO2} = 0$ ; отсюда  $-A_y x + F(x - a) + M_{иII} = 0$  и  $M_{иII} = A_y x - F(x - a)$ .

Таким образом, в каждом поперечном сечении балки действуют поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{и}$ .

Графически  $Q$  и  $M_{и}$  изображаются в виде эпюр. Методика построения эпюр рассмотрена на конкретном примере.

Решение этой задачи существенно облегчается с использованием дифференциальных зависимостей, установленных российским механиком Д. И. Журавским.

Из балки (см. рис. 5.6) выделим элемент, ограниченный сечением 1, расположенным на расстоянии  $x$  от левого конца балки, и сечением 2, расположенным на расстоянии  $(x + dx)$  в пределах участка III (рис. 5.7).

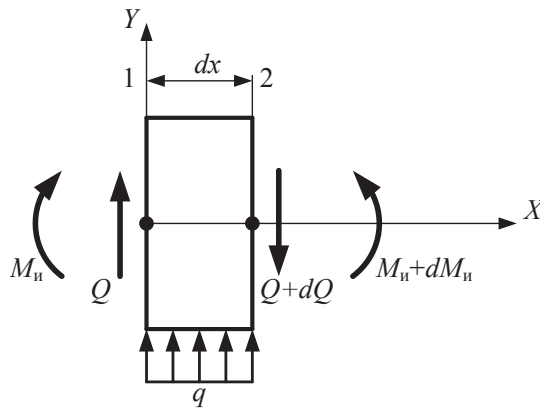


Рис. 5.7

На выделенный элемент действуют:

- в сечении 1 поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_{и}$ ;
- в сечении 2 поперечная сила  $Q + dQ$ , изгибающий момент  $M_{и} + dM_{и}$  и часть распределенной нагрузки интенсивностью  $q$ .

Из условия равновесия выделенного элемента сумма проекций всех сил на ось  $Y$  равна нулю:

$$\sum F_{yi} = 0;$$
$$+Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0.$$

Отсюда получим

$$q = \frac{dQ}{dx}, \quad (5.1)$$

т. е. первая производная от поперечной силы по координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

Сумма моментов всех сил относительно центра тяжести сечения 2 также равна нулю:

$$\sum M_{i0} = 0;$$
$$-M_n - Q \cdot dx - q \frac{(dx)^2}{2} + M_n + dM_n = 0.$$

Пренебрегая квадратом бесконечно малой величины, получим

$$Q = \frac{dM_n}{dx}.$$

С учетом (5.1)

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}.$$

Приведенные дифференциальные зависимости позволяют при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов использовать методы исследования функций (например, исследование функций на экстремум и др.).

### 5.3. Напряжения при чистом изгибе

Экспериментальные исследования при изучении теории изгиба позволяют принять следующие допущения:

- поперечные сечения балки плоские и нормальные к оси до приложения нагрузки остаются плоскими и нормальными к оси и во время нагружения (гипотеза плоских сечений);

- деформации волокон и напряжения, их вызывающие, не зависят от их положения по ширине сечения;
- продольные волокна при чистом изгибе друг на друга не давят и испытывают деформации растяжения и сжатия.

Рассмотрим балку на двух шарнирных опорах, нагруженную двумя равными по величине силами  $F$ , линии действия которых расположены на одинаковом расстоянии  $a$  от опор (рис. 5.8).

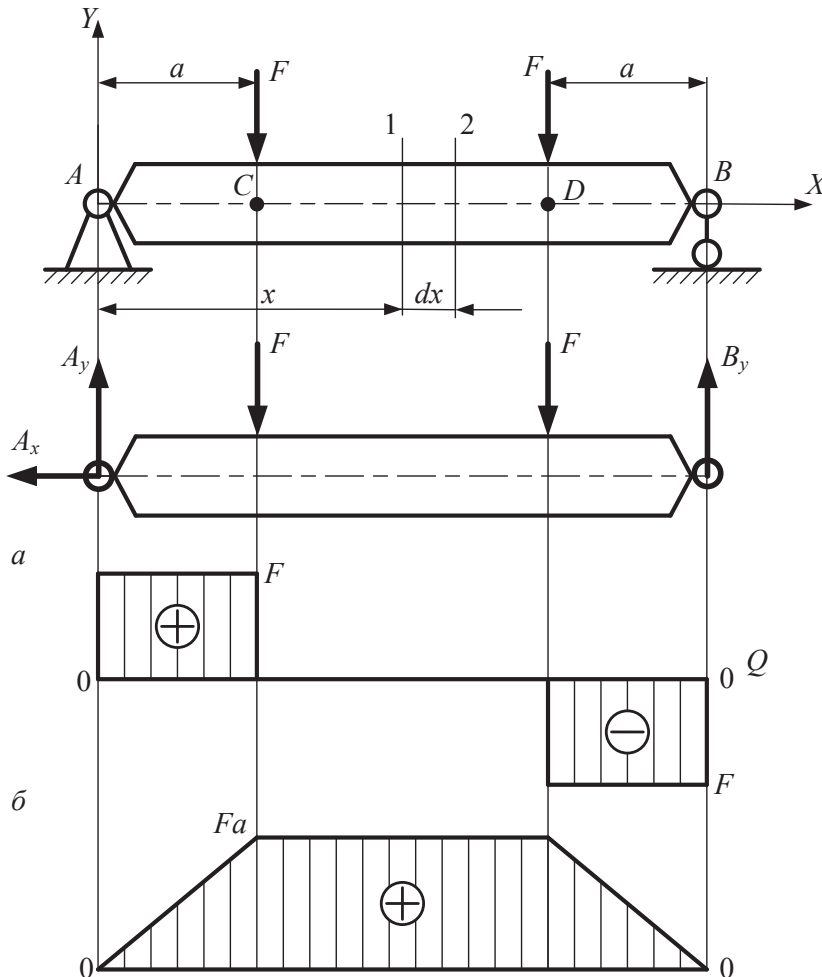


Рис. 5.8

Определив реакции опор и построив эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.8, а, б), убеждаемся, что на участке  $CD$  по-

перечные силы равны нулю и балка испытывает деформацию чистого изгиба.

Из балки на участке  $CD$  выделим элемент, ограниченный сечениями 1 и 2 с координатами  $x$  и  $(x + dx)$  и рассмотрим его деформацию (рис. 5.9).

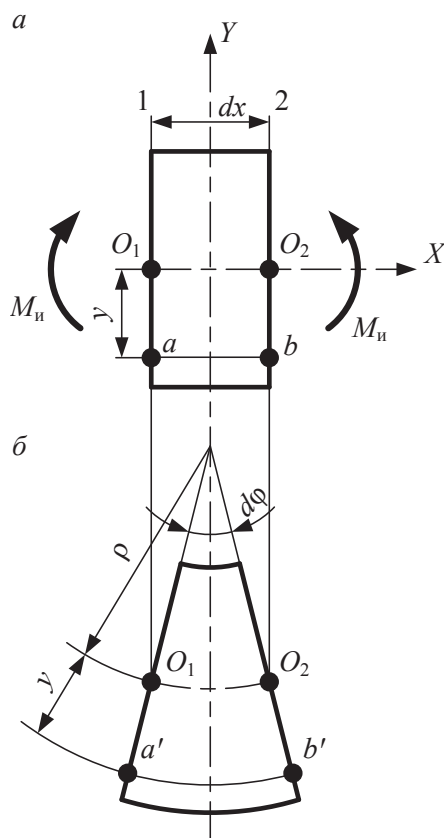


Рис. 5.9

До приложения нагрузки плоские сечения 1 и 2 перпендикулярны прямолинейной оси. Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры тяжести соответствующих сечений (рис. 5.9,  $a$ ).

После приложения нагрузки ось балки, в том числе и ось выделенного элемента, искривится с радиусом  $\rho$ . Сечения 1 и 2, оставаясь плоскими, повернутся вокруг своих центров тяжести и образуют угол  $d\varphi$  (рис. 5.9,  $b$ ). Длина материальных волокон, расположенных на оси балки, не изменится. Волокна, расположенные ниже оси, испытают

деформацию растяжения (растянутые волокна), а волокна, расположенные выше оси, испытывают деформацию сжатия (сжатые волокна).

Рассмотрим деформацию волокна  $ab$ , расположенного на расстоянии  $y$  от оси балки. До приложения нагрузки его длина

$$ab = dx = O_1 O_2.$$

Поскольку  $O_1 O_2$  лежит на нейтральном слое, то его длина не изменится после приложения нагрузки:

$$ab = O_1 O_2 = \cup O_1 O_2 = \rho d\varphi.$$

После приложения нагрузки точки  $a$  и  $b$  займут положения  $a'$  и  $b'$ . Длина дуги

$$\cup a'b' = (\rho + y)d\varphi.$$

Абсолютное удлинение:

$$\cup a'b' - ab = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi.$$

Относительное удлинение:

$$\varepsilon = \frac{\cup a'b' - ab}{ab} = \frac{y}{\rho}.$$

Согласно закону Гука  $\sigma = E\varepsilon$ . Напряжения, вызвавшие такое удлинение,

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}, \quad (5.2)$$

т. е. нормальные напряжения при чистом изгибе по высоте сечения балки распределены пропорционально расстоянию от нейтрального слоя (рис. 5.10).

При  $y = 0$  напряжение  $\sigma = 0$ ; при  $y = h/2$  напряжение  $\sigma = \sigma_{\max}$ .

Рассмотрим поперечное сечение балки, испытывающей деформацию чистого изгиба (рис. 5.11).

Плоскость погружения  $XY$ , т. е. изгиб, происходит вокруг оси  $Z$ . В области точки  $K$  с координатами  $z, y$  выделим элементарную площадку  $dA$ . Нормальная сила, действующая на эту площадку,

$$dN = \sigma dA$$

и создает вокруг оси  $Z$  элементарный момент

$$dM_z = dN \cdot y = \sigma y dA.$$

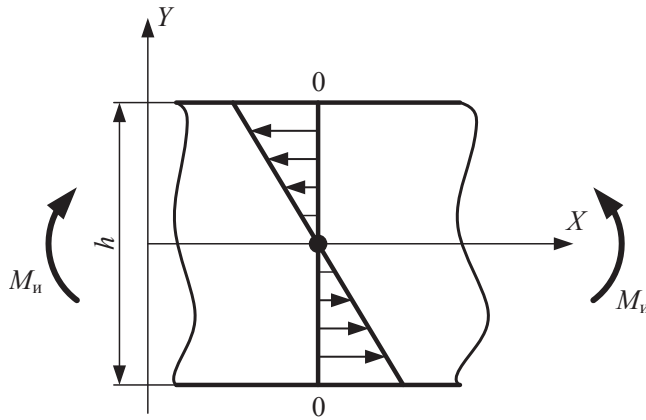


Рис. 5.10

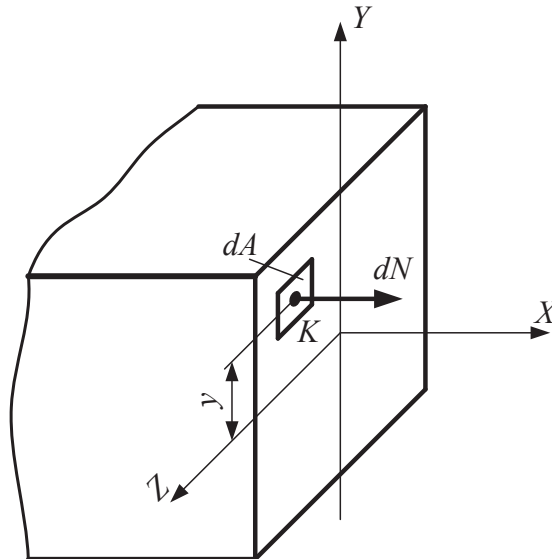


Рис. 5.11

С учетом (5.2) получим

$$dM_n = E \frac{y}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA.$$

Суммируя элементарные моменты по всему сечению, имеем

$$M_n = \int_A dM_n = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA.$$



Вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$M_{\text{и}} = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Обозначим

$$J_z = \int_A y^2 dA.$$

Принято  $J_z$  называть моментом инерции площади сечения относительно оси  $Z$ .

*Момент инерции площади сечения относительно оси (осевой момент инерции)* есть сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния от оси и является чисто геометрической характеристикой, т. е. такой же, как площадь:

$$A = \int_A dA$$

или полярный момент инерции

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA.$$

С учетом принятого обозначения

$$M_{\text{и}} = \frac{E}{\rho} J_z$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{и}}}{EJ_z}. \quad (5.3)$$

Подставив (5.3) в (5.2), получим

$$\sigma = \frac{EyM_{\text{и}}}{EJ_z} = \frac{M_{\text{и}}y}{J_z}.$$

Нормальные напряжения, величина которых прямо пропорциональна расстоянию от нейтрального слоя, совпадающего с осью сечения, будут максимальны в материальных волокнах наиболее отдаленных от оси, т. е. при  $y = y_{\text{max}}$ :

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}y_{\text{max}}}{J_z}.$$

Введем еще одно обозначение:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}},$$

где  $W_z$  — осевой момент сопротивления, равный отношению осевого момента инерции к наибольшему расстоянию от оси.

С учетом принятого обозначения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_z}.$$

#### 5.4. Осевые моменты инерции и моменты сопротивления

---

Рассмотрим два вида сечения — прямоугольное и круглое.

В *прямоугольном сечении* (рис. 5.12) размерами  $b$  и  $h$  выделим прямоугольную элементарную площадку  $dA$  на расстоянии  $y$  от оси  $Z$  и размерами  $dy$  и  $b$ . Ее площадь

$$dA = bdy.$$

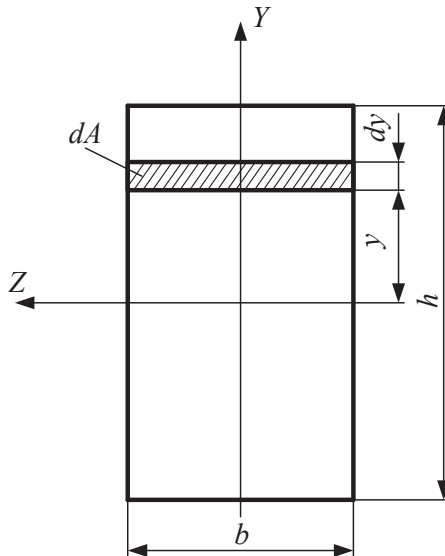


Рис. 5.12

По определению момент инерции относительно оси  $Z$

$$J_z = \int_A y^2 dA.$$

Подставим значение  $dA$  и проинтегрируем по всему сечению:

$$J_z = \int_A y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Принимая во внимание, что

$$y_{\max} = \frac{h}{2},$$

получим момент сопротивления относительно оси  $Z$ :

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}.$$

Рассуждая аналогично, определим момент инерции и момент сопротивления относительно оси  $Y$  (также центральной):

$$J_y = \frac{hb^3}{12};$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6}.$$

Выше уже отмечалось, что *круглое сечение* (рис. 5.13) является симметричным относительно всех центральных осей. Поэтому  $J_y = J_z$ .

$$J_y = \int_A z^2 dA;$$

$$J_z = \int_A y^2 dA.$$

Для определения  $J_y$  и  $J_z$  используем ранее определенное значение полярного момента инерции

$$J_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Поскольку для точки  $K$  (рис. 5.13,  $a$ )

$$\rho^2 = z^2 + y^2,$$

то

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA$$

или

$$J_\rho = J_y + J_z.$$

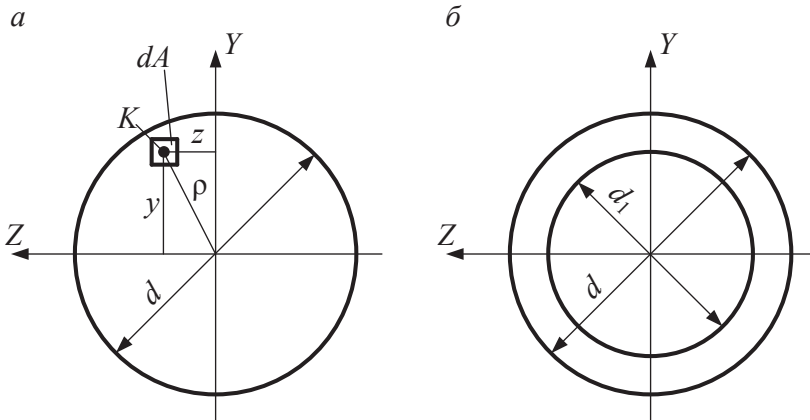


Рис. 5.13

Поскольку  $J_y = J_z$ , то

$$J_y = J_z = \frac{J_\rho}{2}.$$

Для сплошного круга диаметром  $d$

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Следовательно,

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Поскольку

$$y_{\max} = z_{\max} = \frac{d}{2},$$

то осевой момент сопротивления

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Для кольцевого сечения с наружным диаметром  $d$  и внутренним диаметром  $d_1$  (рис. 5.13, б)

$$J_y = J_z = \frac{\pi d^4}{64} (1 - \alpha^4);$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} (1 - \alpha^4),$$

где  $\alpha = d_1/d$ .

## 5.5. Расчет на прочность при чистом изгибе

В общем случае сечение балки несимметрично относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости нагружения, например тавровое сечение (рис. 5.14). При этом материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию. В этом случае проверка на прочность выполняется отдельно по напряжениям растяжения и сжатия.

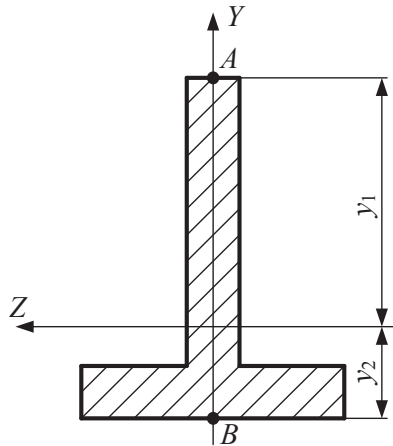


Рис. 5.14

Пусть изгибающий момент  $M_{из}$  в сечении балки (рис. 5.14) положителен, т. е. волокна, расположенные выше оси  $Z$ , сжаты, а ниже оси  $Z$  — растянуты. Максимальные по абсолютной величине напряжения сжатия — в волокнах, расположенных на расстоянии  $y$  от оси  $Z$  (точка  $A$ ). Условие прочности принимает следующий вид:

$$\sigma_{сж} = \frac{M_{из} y_1}{J_z} \leq [\sigma_{сж}].$$

Наибольшие напряжения растяжения действуют в волокнах, соответствующих координате  $y_2$  (точка  $B$ ). Проверка на прочность выполняется по условию

$$\sigma_p = \frac{M_{из} y_z}{J_z} \leq [\sigma_p].$$

В наиболее часто встречающемся частном случае, когда сечение симметрично оси  $Z$  (прямоугольник, круг, двутавр и т. п.) и у материала балки

$$[\sigma_{сж}] = [\sigma_p] = [\sigma],$$

условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{M_{из}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Как и в случаях растяжения, сжатия, сдвига и кручения, задачу определения прочностной надежности при чистом изгибе можно решать в различной постановке. Например, можно определить допускаемую нагрузку, имея известную геометрию поперечного сечения балки и выбрав материал балки с определенными прочностными характеристиками из условия

$$M_{из} \leq W_z [\sigma].$$

Чаще по известной нагрузке и механическим свойствам материала определяют размеры поперечного сечения, отвечающие условию

$$W_z = \frac{M_{из}}{[\sigma]}. \quad (5.4)$$

## 5.6. Расчет на прочность при поперечном изгибе

---

В отличие от чистого изгиба, при поперечном изгибе в поперечном сечении балки наряду с нормальными напряжениями от изгибающего момента  $M_{из}$  действуют касательные напряжения от поперечной силы  $Q$ , определяемые по формуле Д. И Журавского:

$$\tau = \frac{QS_z}{bJ_z},$$

где  $S_z$  — статический момент относительно оси  $Z$ ;  $b$  — ширина сечения.

Касательные напряжения по высоте сечения балки распределены так, как показано на рис. 5.15, а.

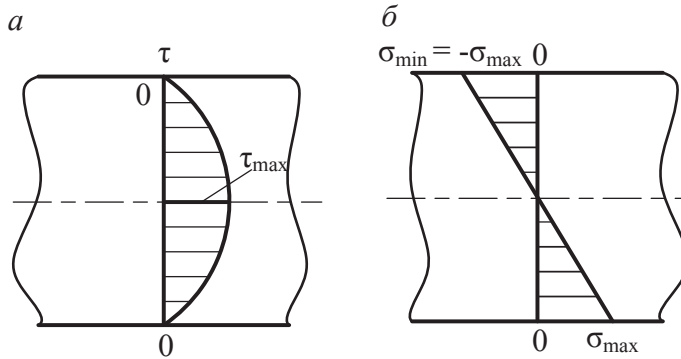


Рис. 5.15

Они равны нулю на поверхности балки и достигают максимума в нейтральном слое. Одновременное действие нормальных напряжений, эпюра которых показана на рис. 5.15, б, приводит к сложному напряженному состоянию и необходимости проверки прочности в различных материальных волокнах по высоте балки.

Необходимость таких сложных расчетов отпадает для балок, у которых длина существенно больше размеров поперечного сечения.

Рассмотрим консольную балку прямоугольного сечения, нагруженную сосредоточенной силой  $F$  на конце вылета  $l$  (рис. 5.16).

Построив эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{из}$ , можно определить в наиболее нагруженном сечении  $A$  наибольшие нормальное и касательное напряжения.

Нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{из}}{W_z},$$

здесь  $M_{из} = Fl$ ;  $W_z = bh^2/6$ .

Отсюда получим

$$\sigma_{\max} = \frac{6Fl}{bh^2}.$$

Касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh}.$$

Отношение

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6Fl \cdot 2bh}{bh^2 \cdot 3F} = \frac{4l}{h}.$$

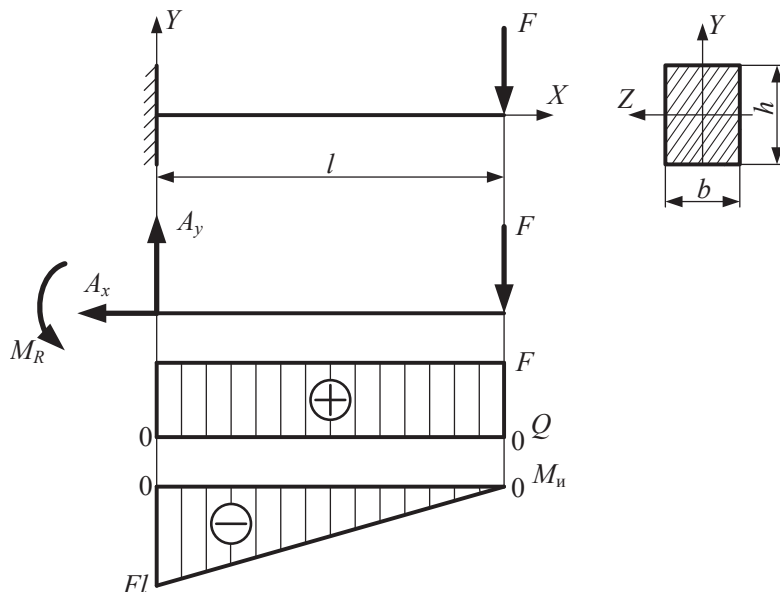


Рис. 5.16

Приведенный пример показывает, что касательные напряжения существенно меньше нормальных и позволяет подвергаемые поперечному изгибу балки рассчитывать, как и при чистом изгибе, т. е. только по нормальным напряжениям, используя условие прочности (5.4).

## 5.7. Деформации при изгибе и расчеты балок на жесткость

Деформация при изгибе заключается в искривлении оси балки. Реально удобнее характеризовать деформацию изгиба прогибами и углами поворота сечений, чем кривизной или радиусом кривизны.

Центр тяжести сечения, расположенного на расстоянии  $x$  от начала координат, переместится на величину  $y$ , а само сечение повернется вокруг своего центра тяжести на угол  $\theta$  (рис. 5.17).



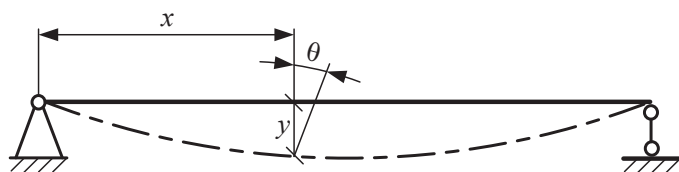


Рис. 5.17

Прогибы  $y$  и углы поворота сечений могут быть определены интегрированием приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки либо энергетическим методом.

Расчет на жесткость заключается в сравнении наибольших прогибов и углов поворота сечений с допускаемыми величинами.

Работоспособной является конструкция, для которой соблюдаются следующие условия:

$$y_{\max} \leq [y]; \quad \theta_{\max} \leq [\theta],$$

где  $[y]$  и  $[\theta]$  — допускаемые величины.

Более подробно этот вопрос рассмотрен в учебном пособии Г. Л. Баранова (Расчет деталей машин. — Екатеринбург: УГТУ—УПИ, 2005. — 170 с.) и выходит за рамки данного пособия.

### Задача № 6

Для балки на двух опорах (рис. 5.18), нагруженной силой  $F$ , моментом  $M$  и распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{из}$ . Длина пролета балки  $l$ . Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma]$  известно.

Рассмотреть два варианта:

- 1) балка в поперечном сечении — круг диаметром  $d$ ;
- 2) балка в поперечном сечении — двутавр.

Определить из расчета на прочность по нормальным напряжениям диаметр  $d$  (вариант 1) и номер профиля двутавра (вариант 2).

Дано:

$$F = 10 \text{ кН},$$

$$M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$q = 80 \text{ кН/м},$$

$$l = 1 \text{ м},$$

$$[\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

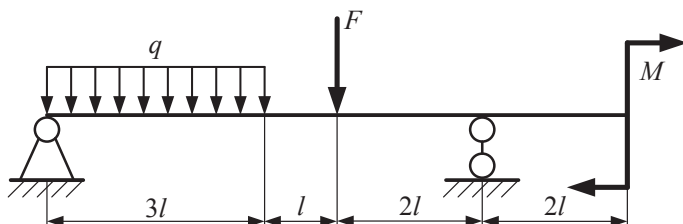


Рис. 5.18

Расчетную схему балки (рис. 5.19, а), промежуточные расчетные схемы, эпюры  $Q$  и  $M_{\text{и}}$  при оформлении записки удобнее изображать на одной странице.

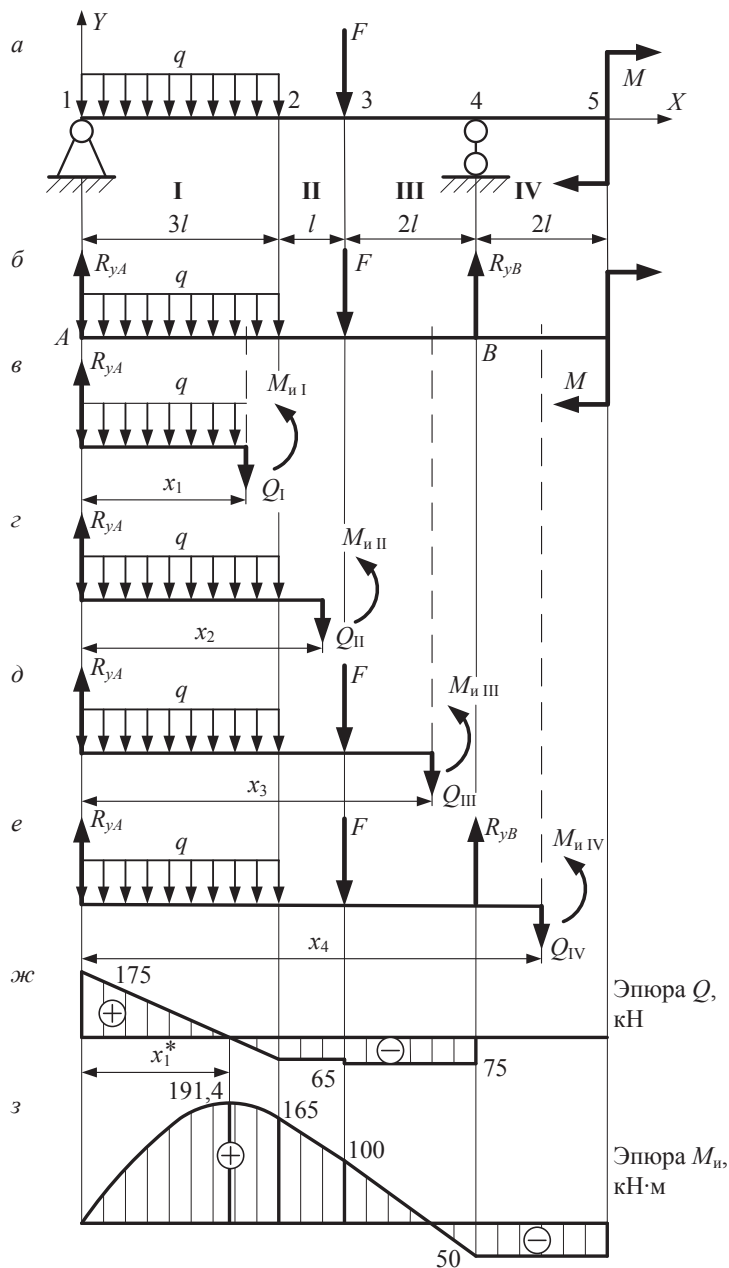


Рис. 5.19

### 1. Определение опорных реакций

Для нахождения реакций представим балку в виде свободного тела, для чего отбросим опоры  $A$  и  $B$ , а их действие на балку заменим реакциями (см. рис. 5.19, б). Опора  $A$  — шарнирно-неподвижная, ее реакция может иметь любое направление в плоскости чертежа. Реакцию в опоре  $A$  разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие  $R_{yA}$  и  $R_{xA}$ . Сумма проекций всех сил на ось  $X$  равна нулю, т. е.  $\sum F_x = 0$ , откуда  $R_{xA} = 0$ . Поэтому на расчетной схеме показываем только вертикальную составляющую реакции  $R_{yA}$ . Опора  $B$  — шарнирно-подвижная, ее реакция всегда направлена перпендикулярно к опорной поверхности, в данном случае — к продольной оси балки  $X$ .

Реакции  $R_{yA}$  и  $R_{yB}$  находим из условия равенства нулю моментов всех сил относительно точек  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \quad q \cdot 3l \cdot 1,5l + F \cdot 4l - R_{yB} \cdot 6l + M = 0; \\ \sum M_B &= 0; \quad R_{yA} \cdot 6l - q \cdot 3l \cdot 4,5l - F \cdot 2l + M = 0.\end{aligned}$$

Определяем  $R_{yB}$  и  $R_{yA}$ :

$$\begin{aligned}R_{yB} &= \frac{4,5ql^2 + 4Fl + M}{6l} = \frac{4,5 \cdot 80 \cdot 1^2 + 4 \cdot 10 \cdot 1 + 50}{6 \cdot 1} = 75 \text{ кН}; \\ R_{yA} &= \frac{13,5ql^2 + 2Fl - M}{6l} = \frac{13,5 \cdot 80 \cdot 1^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 - 50}{6 \cdot 1} = 175 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Если значения  $R_{yA}$  и  $R_{yB}$  получаются отрицательными, необходимо их направление, ранее принятое произвольно, изменить на противоположное.

*Проверка.* Правильность нахождения  $R_{yA}$  и  $R_{yB}$  можно оценить, составив уравнение суммы проекций всех сил на ось  $Y$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= R_{yA} - q \cdot 3l - F + R_{yB} = 0; \\ \sum F_y &= 175 - 80 \cdot 3 \cdot 1 - 10 + 75 = 0.\end{aligned}$$

### 2. Построение эпюр поперечных сил $Q$ , изгибающих моментов $M_u$

Балку (см. рис. 5.19, а) разбиваем на участки I, II, III и IV. Границами участков являются сечения 1...5, в которых приложены внешние силы (реакции в опорах также являются внешними силами) или моменты, а также начало и конец распределенной нагрузки.

Выбираем систему координат с началом в левом крайнем сечении балки.

Для построения эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  используем метод сечений.

Проводим сечения в пределах участков I...IV на расстоянии  $x_i$  от начала координат. Отбрасываем мысленно одну из частей балки, например правую. Рассматриваем равновесие оставшейся левой части. Действие отброшенной правой части заменяем внутренними силовыми факторами: поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ .

Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки считается положительной, если равнодействующая всех внешних сил, расположенных слева от сечения, направлена вверх (или равнодействующая всех внешних сил, расположенных справа от сечения, направлена вниз). В противном случае поперечная сила в рассматриваемом сечении отрицательна.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении будем считать положительным, если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, расположенных слева от сечения, дает равнодействующий момент, направленный по движению часовой стрелки (или алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, расположенных справа от сечения, дает равнодействующий момент, направленный против движения часовой стрелки). Таким образом, изгибающий момент считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз. В противном случае момент отрицателен.

- Построение эпюры поперечных сил  $Q$ .

**Участок I** (см. рис. 5.19, в)

На расстоянии  $x_1$  от начала координат выполним сечение ( $0 \leq x_1 \leq 3l$ ), разделим балку мысленно на две части, отбросим правую часть балки. Величину  $Q_1$  определим из уравнения

$$\sum F_y = R_{yA} - qx_1 - Q_1 = 0.$$

Отсюда

$$Q_1 = R_{yA} - qx_1 = 175 - 80x_1.$$

Функция  $Q_1 = f_1(x_1)$  является уравнением первого порядка (наклонная прямая). Задаваясь значениями  $x_1$ , соответствующими границам участка I, получим:

— при  $x_1 = 0$  поперечная сила  $Q_1 = 175$  кН;

— при  $x_1 = 3l$  поперечная сила  $Q_1 = 175 - 80 \cdot 3 \cdot 1 = -65$  кН.

Строим эпюру  $Q$  для участка I.

**Участок II** (см. рис. 5.19, *з*)

Выполняем сечение на расстоянии  $x_2$  ( $3l \leq x_2 \leq 4l$ ). Рассматриваем равновесие оставленной левой части балки. Получаем

$$\sum F_y = R_{yA} - q \cdot 3l - Q_{II} = 0.$$

Отсюда

$$Q_{II} = R_{yA} - q \cdot 3l = 175 - 80 \cdot 3 \cdot 1 = -65 \text{ кН}.$$

На участке II эпюра  $Q$  — величина постоянная при любом  $x_2$ . Строим эпюру  $Q$  на участке II.

**Участок III** (см. рис. 5.19, *д*)

На расстоянии  $x_3$  ( $4l \leq x_3 \leq 6l$ ) выполняем сечение, величину  $Q_{III}$  определяем из уравнения равновесия левой части балки. Имеем

$$\sum F_y = R_{yA} - q \cdot 3l - F - Q_{III} = 0.$$

Отсюда

$$Q_{III} = R_{yA} - q \cdot 3l - F = 175 - 80 \cdot 3 \cdot 1 - 10 = -75 \text{ кН}.$$

На участке III эпюра  $Q$  — величина постоянная при любом  $x_3$ . Строим эпюру  $Q$  на участке III.

**Участок IV** (см. рис. 5.19, *е*)

Выполняем сечение на расстоянии  $x_4$  ( $6l \leq x_4 \leq 8l$ ), величину  $Q_{IV}$  определяем из уравнения

$$\sum F_y = R_{yA} - q \cdot 3l - F + R_{yB} - Q_{IV} = 0.$$

Отсюда

$$Q_{IV} = R_{yA} - q \cdot 3l - F + R_{yB} = 175 - 80 \cdot 3 \cdot 1 - 10 + 75 = 0.$$

На этом участке величина  $Q$  постоянна и равна нулю.

По найденным значениям строим эпюру  $Q$  (см. рис. 5.19, *ж*).

- Построение эпюры изгибающих моментов  $M_{II}$ .

Эпюру  $M_{II}$  нужно обязательно располагать под эпюрой  $Q$  (см. рис. 5.19, *з*).

**Участок I**

Определим изгибающий момент  $M_{II1}$  в сечении балки, расположенном на расстоянии  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq 3l$ ):

$$\sum M_{и1} = R_{yA}x_1 - qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_{и1} = 0.$$

Отсюда получим

$$M_{и1} = R_{yA}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = 175x_1 - 40x_1^2.$$

Задавая значения  $x_1$ , соответствующие границам рассматриваемого участка, получим:

— при  $x_1 = 0$  момент  $M_{и1} = 0$ ;

— при  $x_1 = 3$  момент  $M_{и1} = 175 \cdot 3 - 40 \cdot 3^2 = 165 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Функция  $M_{и1} = f_2(x_1)$  является уравнением второго порядка (парабола), причем

$$\frac{dM_{и1}}{dx_1} = \left( R_{yA}x_1 - \frac{qx_1^2}{2} \right)' = R_{yA} - qx_1 = Q_1.$$

Эпюра моментов, расположенная под участком с распределенной нагрузкой, может иметь в пределах участка экстремальное значение. Признак экстремума — условие  $dM_{и1} / dx = 0$  или  $Q = 0$ . На участке на расстоянии  $x_1^*$  от начала координат есть сечение, где  $Q = 0$ , в этом сечении на эпюре  $M_{и1}$  — экстремум.

Определяем  $M_{и1 \max}$  в пределах участка I. Возьмем первую производную  $M_{и1}$  по  $x_1$ , приравняем ее к нулю, найдем положение сечения, где изгибающий момент будет максимальным:

$$\frac{dM_{и1}}{dx_1} = R_{yA} - qx_1^* = 175 - 80x_1^* = 0.$$

Отсюда

$$x_1^* = \frac{175}{80} = 2,2 \text{ м}.$$

Находим  $M_{и1 \max}$ :

$$M_{и1 \max} = 175x_1^* - 40(x_1^*)^2 = 175 \cdot 2,2 - 40 \cdot 2,2^2 = 191,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке I имеется распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ , поэтому изгибающий момент изменяется на этом участке по закону квадратной параболы.

Здесь удобно пользоваться шутивым правилом «зонтика». Представим распределенную нагрузку дождиком, который капает на зонтик — эпюру  $M_{и1}$ ; зонтик, эпюра  $M_{и1}$ , под дождем выгнут выпуклостью вверх (рис. 5.20).

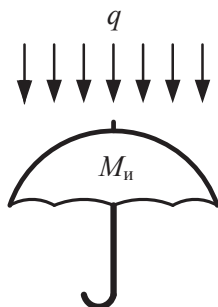


Рис. 5.20

Строим эпюру  $M_{и}$  для участка I.

### Участок II

Определяем изгибающий момент  $M_{иII}$  в сечении балки, расположенном на расстоянии  $x_2$  от начала координат ( $3l \leq x_2 \leq 4l$ ). Рассмотрим равновесие левой части балки при отброшенной правой части (см. рис. 5.19, з):

$$\sum M_{иII} = R_{yA}x_2 - q \cdot 3l(x_2 - 1,5l) - M_{иII} = 0.$$

Отсюда получим:

$$M_{иII} = R_{yA}x_2 - q \cdot 3l(x_2 - 1,5l) = 175x_2 - 80 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (x_2 - 1,5 \cdot 1) = 360 - 65x_2;$$

— при  $x_2 = 3l$  момент  $M_{иII} = 360 - 65 \cdot 3 = 165$  кН·м;

— при  $x_2 = 4l$  момент  $M_{иII} = 360 - 65 \cdot 4 = 100$  кН·м.

На участке II эпюра  $M_{иII}$  изменяется по линейному закону. Строим эпюру  $M_{и}$  для участка II.

### Участок III

На расстоянии  $x_3$  ( $4l \leq x_3 \leq 6l$ ) выполняем сечение. Рассмотрим равновесие левой части балки (см. рис. 5.19, д):

$$\sum M_{иIII} = R_{yA}x_3 - q \cdot 3l(x_3 - 1,5l) - F(x_3 - 4l) - M_{иIII} = 0.$$

Отсюда

$$M_{иIII} = R_{yA}x_3 - 3qlx_3 + 4,5ql^2 - Fx_3 + 4Fl = 175x_3 - 3 \cdot 80 \cdot 1x_3 + 4,5 \cdot 80 \cdot 1^2 - 10x_3 + 4 \cdot 10 \cdot 1 = -75x_3 + 400;$$

— при  $x_3 = 4l$  момент  $M_{иIII} = -75 \cdot 4 + 400 = 100$  кН·м;

— при  $x_3 = 6l$  момент  $M_{иIII} = -75 \cdot 6 + 400 = -50$  кН·м.

Строим эпюру  $M_{и}$  для участка III.

### Участок IV

Выполняем сечение на расстоянии  $x_4$  ( $6l \leq x_4 \leq 8l$ ). Рассмотрим равновесие левой части балки (см. рис. 5.19, e):

$$\sum M_{iIV} = R_{yA}x_4 - q \cdot 3l(x_4 - 1,5l) - F(x_4 - 4l) + R_{yB}(x_4 - 6l) - M_{iIV} = 0.$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} M_{iIV} &= R_{yA}x_4 - q \cdot 3l(x_4 - 1,5l) - F(x_4 - 4l) + R_{yB}(x_4 - 6l) = \\ &= 175x_4 - 3 \cdot 80 \cdot 1 \cdot (x_4 - 1,5 \cdot 1) - 10(x_4 - 4 \cdot 1) + 75(x_4 - 6 \cdot 1) = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

На участке IV величина  $M_{iIV}$  постоянна и не зависит от  $x_4$ . Строим эпюру  $M_i$  для участка IV.

Для проверки правильности построения эпюр  $Q$  и  $M_i$  можно пользоваться следующими правилами:

- на участке, на котором отсутствует распределенная нагрузка  $q$ , поперечная сила  $Q$  постоянна, изгибающий момент  $M_i$  на этом участке изменяется по линейному закону;
- на участке, на котором имеется равномерно распределенная нагрузка  $q$ , поперечная сила  $Q$  меняется по линейному закону, а изгибающий момент  $M_i$  на этом участке меняется по закону квадратной параболы выпуклостью навстречу распределенной нагрузке. Изгибающий момент будет экстремальным в сечении, где  $Q = 0$ ;
- на участке балки, где поперечная сила  $Q$  положительна, изгибающий момент возрастает, а там, где отрицательна, — убывает;
- если на границе соседних участков балки эпюра  $Q$  не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру  $M_i$  на этих участках, сопрягаются без перелома, т. е. имеют в точке сопряжения общую касательную;
- если на границе соседних участков балки в эпюре  $Q$  имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру  $M_i$  на этих участках, сопрягаются с переломом, т. е. не имеют в точке сопряжения общей касательной;
- если поперечная сила на каком-либо участке балки отсутствует, то изгибающий момент на этом участке имеет постоянное значение, т. е. при  $Q = 0$  изгибающий момент  $M_i = \text{const}$ ;
- эпюра поперечных сил имеет скачки в местах приложения сосредоточенных сил, причем величина скачка равна по величине приложенной силе;



— сосредоточенный момент не влияет на характер эпюры поперечных сил, а на эпюре изгибающих моментов в этом сечении имеется скачок, величина которого равна приложенному моменту.

Используя приведенные зависимости, можно строить эпюры  $Q$  и  $M_{из}$ , не составляя аналитических выражений для  $Q$  и  $M_{из}$ , а ограничиваясь вычислением значений поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях балки.

### 3. Определение размеров поперечного сечения балки

Минимально допустимый осевой момент сопротивления поперечного сечения балки из условия прочности относительно горизонтальной оси этого сечения

$$W_{из} = \frac{|M_{из \max}|}{[\sigma]} = \frac{191,4 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

- Определение диаметра  $d$  из расчета на прочность по нормальным напряжениям (вариант 1)

Для круглого сечения диаметром  $d$  осевой момент сопротивления изгибу

$$W_{из} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Отсюда получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_{из}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,29 \text{ м} = 290 \text{ мм}.$$

- Определение номера двутаврового профиля из расчета на прочность по нормальным напряжениям (вариант 2)

Минимально допустимый осевой момент сопротивления поперечного сечения двутавровой балки  $W_{из} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2400 \text{ см}^3$ .

Из таблиц сортамента ГОСТ 8239–89 выбираем двутавровую балку, осевой момент сопротивления которой  $W_{из} = 2560 \text{ см}^3$ . Номер профиля поперечного сечения балки № 60.

### Задача № 7

Проверить прочность консольной балки (рис. 5.21), нагруженной силой  $F$ , моментом  $M$  и распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ . Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{из}$ .

Балка в поперечном сечении — прямоугольник с прямоугольным вырезом. Размеры поперечного сечения  $b_1, h_1, b_2, h_2$ , длина пролета балки  $l$ , а также допускаемое напряжение материала балок  $[\sigma]$  известны.

Дано:

$$F = 200 \text{ кН},$$

$$M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$q = 200 \text{ кН/м},$$

$$[\sigma] = 150 \text{ МПа},$$

$$b_1 = 0,38 \text{ м},$$

$$h_1 = 0,48 \text{ м},$$

$$b_2 = 0,32 \text{ м},$$

$$h_2 = 0,42 \text{ м},$$

$$l = 1 \text{ м}.$$

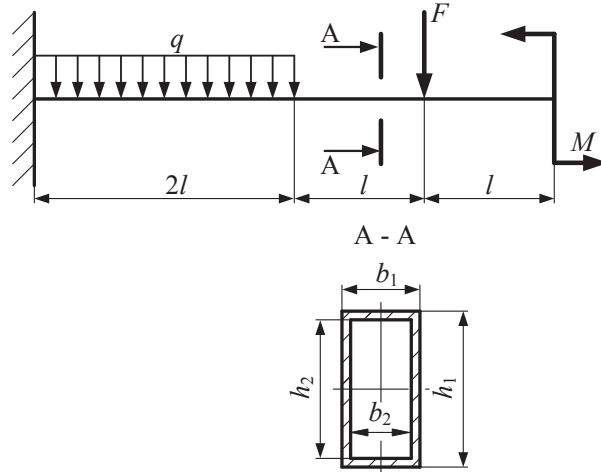


Рис. 5.21

Для расчетной схемы (рис. 5.22, а) построим эпюры  $Q$  и  $M_{\text{и}}$ , пользуясь методикой построения эпюр по характерным сечениям.

Разобьем балку на участки I, II и III, границами которых являются точки приложения внешних сосредоточенных сил и моментов, а также начало и конец действия распределенных нагрузок.

Определяем значения поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{\text{и}}$  в поперечных сечениях, расположенных в начале и конце каждого участка, и откладываем эти результаты соответственно на эпюры  $Q$  и  $M_{\text{и}}$ .

Ординаты эпюр соединяем линиями.

### 1. Определение опорных реакций

Выбираем систему координат с началом в точке А (опоре консольной балки). Отбрасываем опору и ее действие заменяем вертикальной составляющей  $R_{yA}$ , горизонтальной составляющей  $R_{xA}$  опорной реакции, а также реактивным моментом  $M_A$  (рис. 5.22, б).

Уравнения равновесия для определения опорных реакций консольной балки приведем ниже:

$$\sum F_y = 0; \quad R_{yA} - q \cdot 2l - F = 0;$$

$$\sum F_x = 0; \quad -R_{xA} = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + q \cdot 2l \cdot l + F \cdot 3l - M = 0.$$

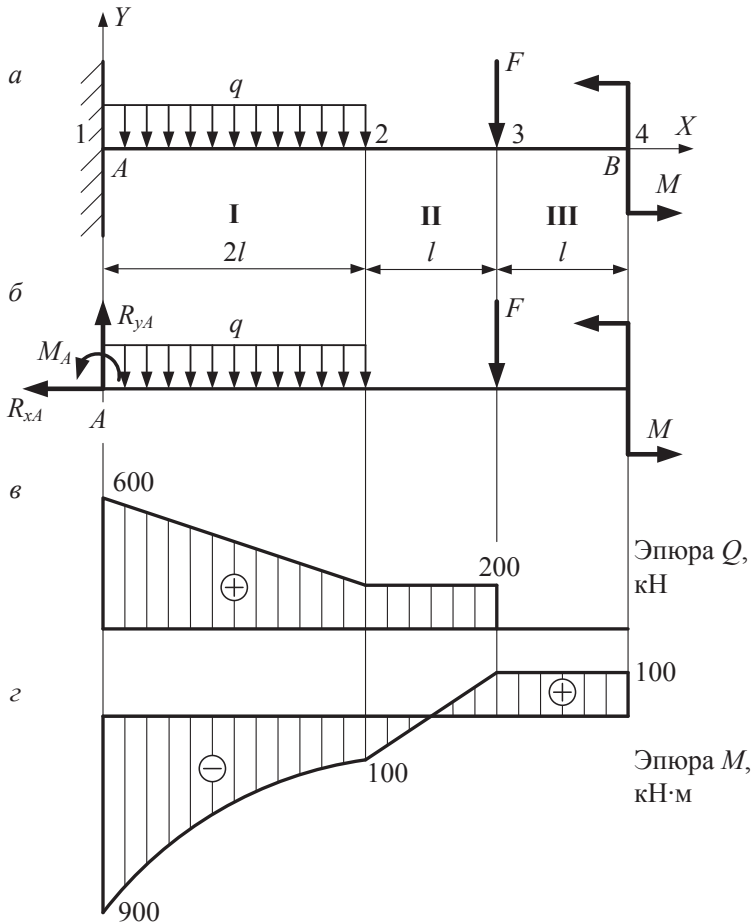


Рис. 5.22

Имеем:

$$R_{yA} = 2ql + F = 2 \cdot 200 \cdot 1 + 200 = 600 \text{ кН};$$

$$R_{xA} = 0;$$

$$M_A = 2ql^2 + 3Fl - M = 2 \cdot 200 \cdot 1^2 + 3 \cdot 200 \cdot 1 - 100 = 900 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Числовые значения реакций положительны, следовательно, их направление было назначено верно. В противном случае направление реакций необходимо изменить на противоположное.

Для проверки правильности определения реакций составим уравнение равновесия относительно точки  $B$ , которое не было использовано при нахождении реакций:

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0; \quad -M_A - q \cdot 2l \cdot 3l - F \cdot l - M + R_{yA} \cdot 4l = 0; \\ \sum M_B &= -900 - 200 \cdot 6 \cdot 1^2 - 200 \cdot 1 - 100 + 600 \cdot 4 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

## 2. Определение поперечных сил $Q$ в характерных сечениях, построение эпюры $Q$

Балка разбита сечениями на три участка. Определяем  $Q$  в каждом характерном сечении.

При записи числовых значений  $Q$  (и позднее  $M_u$ ) нижние индексы «Л» и «П» будут означать следующее: Л — поперечная сила (изгибающий момент) вычислена слева от рассматриваемого сечения, а П — справа.

Находим:

$$\begin{aligned}Q_{1Л} &= 0; \\ Q_{1П} &= R_y = 600 \text{ кН}; \\ Q_{2Л} = Q_{2П} &= R_{yA} - q \cdot 2l = 600 - 200 \cdot 2 \cdot 1 = 200 \text{ кН}\end{aligned}$$

( $Q_{2Л} = Q_{2П}$ , так как в сечении на расчетной схеме отсутствует внешняя поперечная сила);

$$\begin{aligned}Q_{3Л} &= R_{yA} - q \cdot 2l = 600 - 200 \cdot 2 \cdot 1 = 200 \text{ кН}; \\ Q_{3П} &= R_{yA} - q \cdot 2l - F = 600 - 200 \cdot 2 \cdot 1 - 200 = 0\end{aligned}$$

(на расчетной схеме в третьем сечении действует сила  $F$ , которая «дала скачок» на величину и в направлении действующей силы  $F$ );

$$Q_{4Л} = Q_{4П} = R_{yA} - q \cdot 2l - F = 600 - 200 \cdot 2 \cdot 1 - 200 = 0.$$

Откладываем в масштабе на эпюре  $Q$  полученные значения поперечных сил  $Q$  в соответствующих характерных сечениях.

На участке I — наклонная прямая, так как на этом участке на расчетной схеме балки действует распределенная нагрузка.

На участке II прямая линия параллельна базовой линии.

На участке III  $Q = 0$ . Строим эпюру  $Q$  (см. рис. 5.22, в).

## 3. Определение изгибающих моментов $M_u$ в характерных сечениях, построение эпюры $M_u$

Переходим к построению эпюры  $M_u$ . Предварительно определяем величину момента в каждом характерном сечении:

$$M_{uЛ1} = 0;$$

$$M_{иП1} = -M_A = -900 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_{иЛ2} = M_{иП2} &= -M_A + R_{yA} \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = \\ &= -900 + 600 \cdot 2 \cdot 1 - 200 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = -100 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

( $M_{иЛ2} = M_{иП2}$ , так как во втором сечении нет внешнего  $M_{и}$ );

$$\begin{aligned} M_{иЛ3} = M_{иП3} &= -M_A + R_{yA} \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l = \\ &= -900 + 600 \cdot 3 \cdot 1 - 200 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{иЛ4} &= -M_A + R_{yA} \cdot 4l - q \cdot 2l \cdot 3l - Fl = \\ &= -900 + 600 \cdot 4 \cdot 1 - 200 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 200 \cdot 1 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$M_{иП4} = M_{иЛ4} - M = 100 - 100 = 0.$$

Откладываем в масштабе на эпюре  $M_{и}$  полученные значения изгибающих моментов (см. рис. 5.22, з).

На участке I распределенная нагрузка «дает» кривую второго порядка без экстремума, так как на этом участке нет сечения, где бы  $Q = 0$ .

На участке II — наклонная прямая.

На участке III прямая параллельна базовой линии. Отметим, что на этом участке на эпюре поперечных сил  $Q = 0$ .

Эпюры  $Q$  и  $M_{и}$  построены по характерным сечениям с использованием зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно распределенной нагрузки.

#### 4. Проверка прочности балки

Для проверки прочности балки применим расчетное уравнение на прочность при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{и\max}| \cdot 0,5h_1}{J_{и}} \leq [\sigma].$$

Наибольший изгибающий момент для данной балки в сечении 1:

$$|M_{и\max}| = 900 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Осевой момент инерции относительно горизонтальной оси поперечного сечения балки:

$$J_{и} = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{0,38 \cdot 0,48^3}{12} - \frac{0,32 \cdot 0,42^3}{12} = 0,0015 \text{ м}^4.$$

Максимальное нормальное напряжение в сечении 1 сравниваем с допускаемым напряжением материала балки  $[\sigma]$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{900 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 0,48}{0,0015} = 144 \cdot 10^6 \text{ Па} = 144 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

### Задания для самопроверки

**Задание 1.** Для стальной балки (рис. 5.23, а), нагруженной системой сил, построить эпюры поперечных сил  $Q$  и моментов изгибающих  $M_{из}$ , если  $q = 80 \text{ кН/м}$ ,  $M = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .

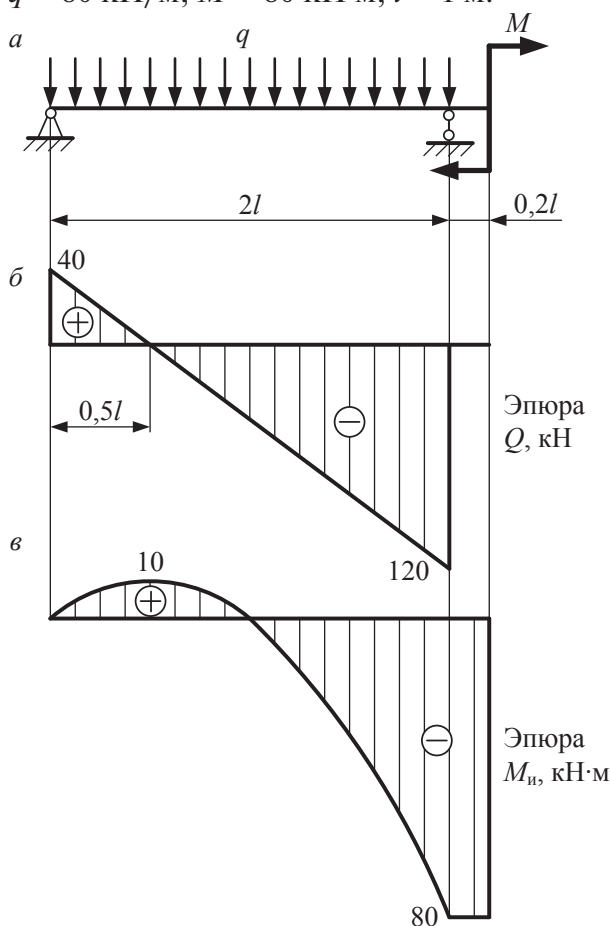


Рис. 5.23

Проверить прочность балки, если балка в поперечном сечении — прямоугольник с основанием  $b = 80$  мм и высотой  $h = 200$  мм. Величина допускаемого напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа.

Ответ: 1) эпюры поперечных сил  $Q$  и моментов изгибающих  $M_{из}$  представлены на рис. 5.23, б, в; 2) условие прочности при изгибе выполняется, поскольку  $\sigma_{max} = 150$  МПа  $< [\sigma] = 160$  МПа.

**Задание 2.** Двухтавровая консольная балка нагружена системой сил (рис. 5.24, а):  $q = 100$  кН/м,  $M_1 = 100$  кН·м,  $M_2 = 200$  кН·м. Длина пролета  $l = 0,4$  м. Допускаемое нормальное напряжение материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа.

Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и моментов изгибающих  $M_{из}$ . Подобрать номер профиля двутавра.

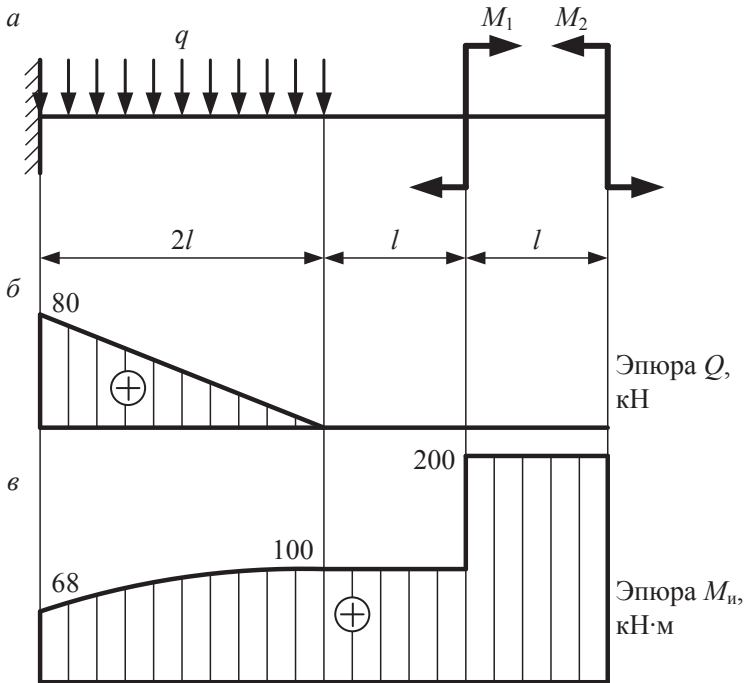


Рис. 5.24

Ответ: 1) эпюры поперечных сил  $Q$  и моментов изгибающих  $M_{из}$  представлены на рис. 5.24, б, в; 2) по результатам расчета на прочность выбираем двутавр № 50 (см. ГОСТ 8239-89).

## 6. Напряженное и деформированное состояние в точке. Теория прочности

### 6.1. Напряженное и деформированное состояние в точке

По граням элемента, выделенного в окрестности произвольной точки тела, находящегося под действием системы внешних сил, действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 6.1, а). В соответствии с выбранной системой координат они обозначены  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ .

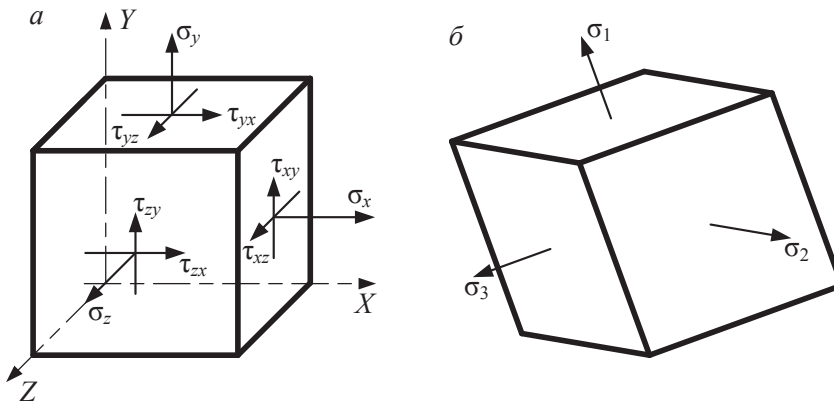


Рис. 6.1

Данными напряжениями полностью определяется напряженное состояние в точке. Выражение

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$



носит название *тензор напряжений*. Величина компонентов тензора зависит не только от внешней нагрузки, действующей на напряженное тело, но и от того, каким образом грани выделенного элемента ориентированы в пространстве.

В теории упругости доказывается, что, во-первых, касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках попарно равны:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  (закон парности касательных напряжений), и, во-вторых, что через любую точку напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых не будут действовать касательные напряжения.

Такие площадки называются главными, а нормальные напряжения, действующие на них, — главными нормальными напряжениями. Элемент объема, гранями которого являются главные площадки, показан на рис. 6.1, б.

Тензор напряжений в этом случае имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

Индексы главным нормальным напряжениям присваиваются в соответствии с неравенством

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Если, например, имеем  $\sigma' = -500$  МПа,  $\sigma'' = -200$  МПа и  $\sigma''' = 50$  МПа, то  $\sigma_1 = 50$  МПа,  $\sigma_2 = -200$  МПа,  $\sigma_3 = -500$  МПа.

Если из трех главных нормальных напряжений только одно отлично от нуля, то такое напряженное состояние называется линейным или одноосным (рис. 6.2).

Когда два из трех главных нормальных напряжений отличны от нуля, имеем плоское или двухосное напряженное состояние (рис. 6.3).

И наиболее общий случай, когда все три главных нормальных напряжения отличны от нуля, — напряженное состояние является объемным или трехосным (рис. 6.4).

Для определения прочностной надежности детали (элемента конструкции) необходимо знать три нормальных и шесть касательных напряжений в наиболее нагруженной точке либо три главных нормальных напряжения.

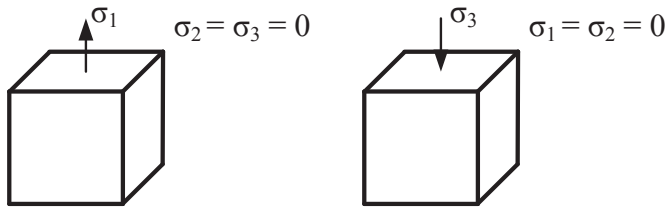


Рис. 6.2

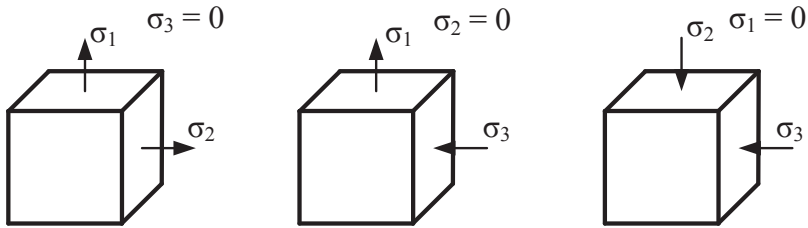


Рис. 6.3

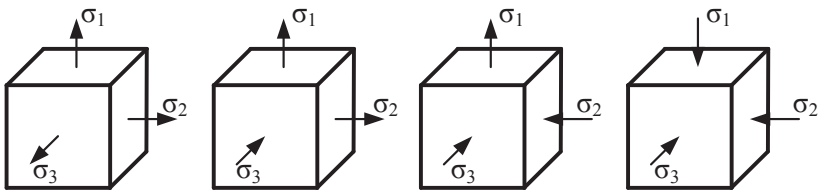


Рис. 6.4

Связь между напряжениями на произвольно ориентированных площадках и главных площадках для плоского напряженного состояния (рис. 6.5) определяется зависимостями

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

которые позволяют рассчитать  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  при определенных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

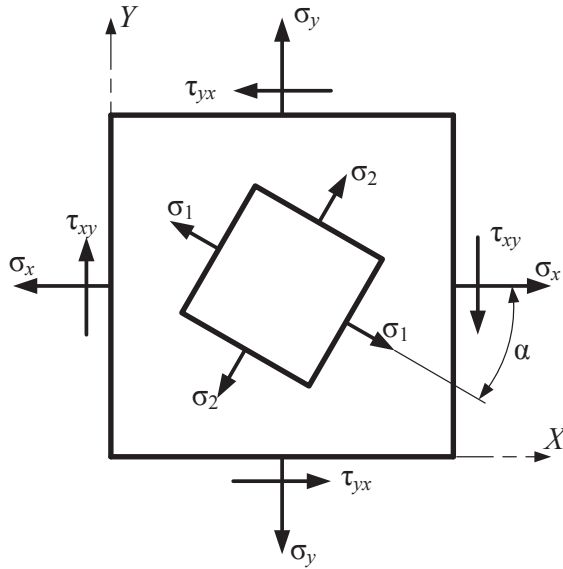


Рис. 6.5

Аналогично напряженному состоянию описывается и деформированное состояние в точке.

Тензор деформаций имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix},$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  — линейные относительные деформации в направлении соответствующих координатных осей;  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$  — относительные деформации сдвига, или

$$T_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix},$$

где  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  — линейные относительные деформации в направлении действия главных нормальных напряжений.

Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  в пределах упругости определяются обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации).

Для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1)$$

и для линейного

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1;$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{E}\mu\sigma_1.$$

Определив главные деформации, можно определить изменение объема. Например, для элементарного объема в форме куба с длиной ребра, равной единице, объем составляет:

- до деформации  $V_0 = 1$ ;
- после деформации

$$V_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получим

$$V_1 = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Относительное изменение объема

$$\varepsilon_0 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

С учетом обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

## 6.2. Потенциальная энергия деформации

В общем случае энергия деформации  $E_p$  расходуется на изменение объема  $E_{pV}$  и изменение формы  $E_{pf}$ :

$$E_p = E_{pV} + E_{pf}.$$

При определении энергии деформации напряженное состояние удобно представить в виде суммы двух напряженных состояний (рис. 6.6).

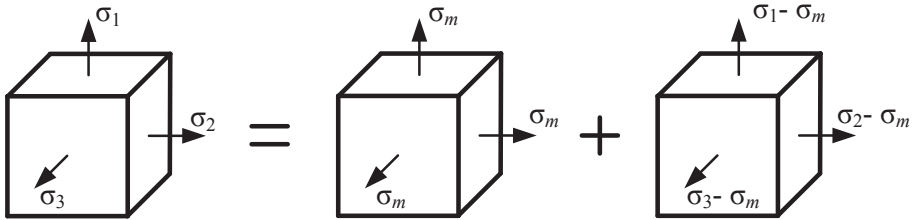


Рис. 6.6

Первое представляет собой всестороннее растяжение либо сжатие средним напряжением

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Описывающий его тензор называется шаровым. Под действием этих напряжений происходит изменение объема элемента вследствие одинакового удлинения (укорочения) длин ребер.

Второе напряженное состояние с компонентами  $(\sigma_1 - \sigma_m)$ ,  $(\sigma_2 - \sigma_m)$ ,  $(\sigma_3 - \sigma_m)$  приводит к изменению формы и называется девиатором.

Энергия деформации в пределах упругости определяется следующим образом:

- при линейном напряженном состоянии

$$E_p = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1;$$

- при плоском напряженном состоянии

$$E_p = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2);$$

- при объемном напряженном состоянии

$$E_p = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3).$$

Определив деформации из обобщенного закона Гука, получим при объемном напряженном состоянии

$$E_p = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)].$$

Подставив вместо  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  среднее напряжение  $\sigma_m$ , определим энергию изменения объема:

$$E_{pV} = \frac{1-2\mu}{2E} \cdot 3\sigma_m^2 = \frac{1-2\mu}{2E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Потенциальную энергию формоизменения определим как разность:

$$E_{pf} = E_p - E_{pV}.$$

Подставив ранее полученные зависимости для полной энергии деформации и энергии изменения объема, после преобразований получим

$$E_{pf} = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Для плоского напряженного состояния

$$E_{pf} = \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2 \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2).$$

Для линейного напряженного состояния

$$E_{pf} = \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2\sigma_1^2.$$

### 6.3. Теория прочности

Практика показывает, что прочностная надежность детали (элемента конструкции) определяется напряженным состоянием в наиболее нагруженной точке, т. е. совокупностью действующих в ней всех нормальных и касательных напряжений, или, что то же самое, величиной трех главных нормальных напряжений.

Предельное напряженное состояние, предшествующее разрушению или текучести для материалов в пластичном состоянии, можно наиболее точно определить экспериментально. Выполнение таких экспериментов при линейном напряженном состоянии (растяжение, сжатие) или при простейшем плоском, когда главные напряжения равны между собой по величине и противоположны по знаку (чистый сдвиг, кручение), осуществляется относительно просто. Однако в более сложных случаях плоского и тем более объемного напряженного состояния такие эксперименты являются трудоемкими и требуют сложного оборудования. В связи с этим была высказана идея о том, что любому сложному напряженному состоянию можно подобрать линейное эквивалентное с точки зрения прочности (рис. 6.7).

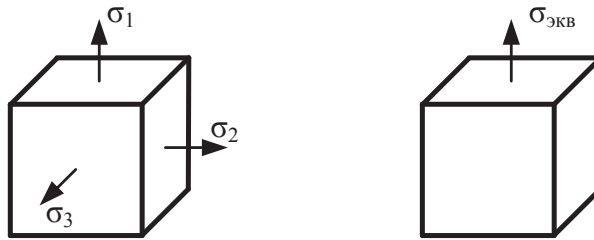


Рис. 6.7

В этом случае появляется возможность использовать в расчетах предельные напряжения (предел прочности  $\sigma_b$  и предел текучести  $\sigma_t$ ), определенные из диаграммы растяжения. Связь между исходным сложным напряженным состоянием и эквивалентным (равноопасным) ему одноосным растяжением либо сжатием можно установить только на основании знания истинной причины разрушения. По этому поводу учеными высказан целый ряд гипотез, которые получили название *теории прочности*.

Познакомимся с наиболее известными из них.

*Первая теория прочности* носит название теории наибольших нормальных напряжений. Согласно этой теории, разрушение, независимо от вида напряженного состояния, произойдет тогда, когда наибольшее из трех главных нормальных напряжений превысит допускаемую для данного материала величину. Условие прочности по первой теории прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{экви}} = \sigma_1 \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение, определяемое из диаграммы растяжения.

Расчеты по этой теории дают достаточно удовлетворительные результаты только при расчете деталей, изготовленных из материалов, находящихся в хрупком состоянии.

*Вторая теория прочности* называется теорией наибольших линейных деформаций. По этой теории разрушение, независимо от вида напряженного состояния, произойдет тогда, когда наибольшее относительное удлинение или укорочение в каком-либо направлении достигнет предельного значения. При сложном напряженном состоянии наибольшая относительная деформация будет в направлении действия  $\sigma_1$  и, согласно обобщенному закону Гука,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При эквивалентном одноосном состоянии

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \varepsilon_{\text{экр}}.$$

Условие прочности при этом выглядит как

$$\sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Следует отметить, что экспериментальная проверка и в этой теории обнаружила ряд существенных недостатков.

*Третья теория прочности* — это теория наибольших касательных напряжений. Согласно этой теории прочности, текучесть (предельное состояние для пластичных материалов), независимо от вида напряженного состояния, наступит тогда, когда наибольшее касательное напряжение превысит допускаемую величину. При сложном напряженном состоянии наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

При эквивалентном одноосном состоянии

$$\tau = \frac{\sigma_{\text{экр}}}{2}.$$

Тогда условие прочности

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$



При плоском напряженном состоянии

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

В частном случае при  $\sigma_y = 0$ , что имеет место при плоском поперечном изгибе и изгибе с кручением,

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Расчеты по третьей теории прочности для изготовленных из пластичных материалов деталей дают результаты, хорошо совпадающие с экспериментом.

*Четвертая теория прочности* носит название энергетической. Данная теория прочности основывается на гипотезе о том, что опасное состояние, независимо от вида напряженного состояния, наступит тогда, когда потенциальная энергия формоизменения единицы объема превысит допускаемую величину. При сложном напряженном состоянии энергия формоизменения определяется как

$$E_{pf} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При эквивалентном одноосном состоянии

$$E_{pf} = \frac{1+\mu}{6E} \cdot 2\sigma_{\text{экв}}^2.$$

Условие прочности по четвертой теории прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

В условиях плоского напряженного состояния оно приобретает вид

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq [\sigma].$$

В частном случае, когда  $\sigma_y = 0$ , обозначив  $\sigma_x = \sigma$  и  $\tau_{xy} = \tau$ , получим

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Энергетическая теория прочности хорошо согласуется с экспериментами с материалами, находящимися в пластичном состоянии, и широко используется в расчетной практике.

В рассмотренных теориях прочности полагали, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. В противном случае используют теорию прочности Мора, которую иногда называют пятой теорией прочности. Условие прочности по теории Мора имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_p,$$

где

$$k = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{\text{сж}}}.$$

Здесь  $[\sigma]_p$ ,  $[\sigma]_{\text{сж}}$  — допустимые напряжения растяжения и сжатия соответственно.

Практика показывает, что универсальной и совершенной теории прочности еще не найдено. Каждая из рассмотренных теорий справедлива (дает результаты, близкие к практике) только в определенных условиях и для определенных материалов.

---

## 7. Сложное сопротивление.

### Изгиб с кручением

---

#### Общие положения

---

**Р**езультатом действия сил на тело является возникновение простых деформаций: растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба. В общем случае нагружения наблюдаются комбинации простых деформаций, что вызывает сложное сопротивление и появление одновременно нормальных и касательных напряжений.

На практике чаще всего встречаются следующие виды сложного сопротивления: внецентренное растяжение-сжатие, изгиб в двух плоскостях, изгиб с кручением.

Изгиб с кручением испытывают многие узлы и детали металлорежущих станков. Например, оправка горизонтально-фрезерного станка, укрепленная на двух опорах, подвергается одновременно изгибу от силы резания на фрезе и кручению от передачи вращательного момента. Деформацию растяжения и кручения испытывают болты и крепежные винты при затяжке, деформацию сжатия и кручения — винты домкратов, сверла, шпиндели станков. Примером тел, имеющих ось вращения и нагруженных силами, расположенными в пространстве произвольно, могут быть валы редукторов, коробок скоростей, которые испытывают совместное действие кручения и изгиба. Таким образом, изгиб с кручением является наиболее характерным случаем нагружения валов.

Расчет на прочность при совместном изгибе и кручении (подробная методика приводится ниже) выполняют по эквивалентному (расчетному) напряжению, определенному в опасном сечении для опасной точки, в которой имеет место плоское напряженное состояние, с использованием теорий прочности. Для гладкого вала постоянного

диаметра опасным является сечение, в котором эквивалентный момент наибольший.

При расчете брусьев круглого поперечного сечения на изгиб с кручением для опасного сечения определяют эквивалентный момент  $M_p$ :

- по теории наибольших касательных напряжений

$$M_p^{III} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2};$$

- по теории энергии формоизменения

$$M_p^{IV} = \sqrt{M_{и}^2 + 0,75M_{к}^2},$$

где  $M_{и}$ ,  $M_{к}$  — соответственно изгибающий и крутящий моменты в опасном сечении вала.

Эквивалентное напряжение определяется по одной из теорий прочности. Так, например, для стальных валов по теории касательных напряжений

$$\sigma_{экр}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

по теории энергии формоизменения

$$\sigma_{экр}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

### Задача № 8

Вал механической передачи под действием системы сил, приложенных к посаженным на него деталям (шків ременной передачи и косозубые цилиндрические колеса), вращается с постоянной угловой скоростью.

Определить диаметр вала  $d_v$  (рис. 7.1) из условия прочности в опасном сечении, если заданы:

- передаваемая мощность  $P$ ;
- частота вращения  $n$ ;
- диаметры зубчатых колес  $d$ ;
- диаметр шкива  $d_1$ ;
- линейный размер  $l$ ;
- допускаемое напряжение материала вала  $[\sigma]$ .

Соотношение сил принять:

$$F_r = 0,38F_t;$$

$$F_a = 0,15F_t;$$

$$F_1 = 2F_2.$$

При расчете использовать четвертую теорию прочности.

Дано:

$$P = 5 \text{ кВт},$$

$$n = 200 \text{ мин}^{-1},$$

$$d = 63 \text{ мм},$$

$$d_1 = 200 \text{ мм},$$

$$l = 100 \text{ мм},$$

$$[\sigma] = 50 \text{ МПа}.$$

Определить  $d_b$ .

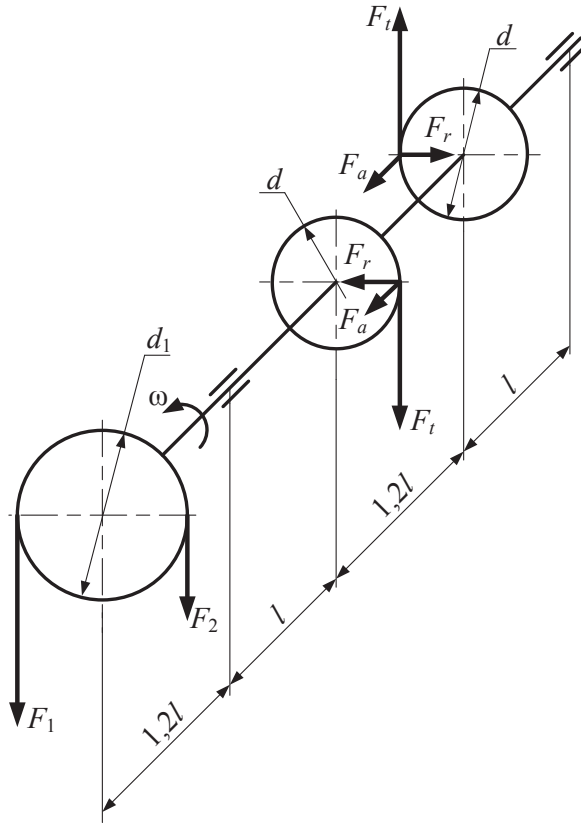


Рис. 7.1

### 1. Составление расчетной схемы вала

Определяем величину внешнего вращающего момента  $T$ :

$$T = 9550 \cdot \frac{P}{n},$$

где  $P$  — мощность, кВт;  $n$  — частота вращения,  $\text{мин}^{-1}$ .

$$T = 9550 \cdot \frac{5}{200} = 239 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Определяем моменты сил сопротивления  $T_1$ .

Вал вращается с постоянной скоростью, следовательно, момент движущих сил  $T$  равен суммарному моменту сил сопротивления:

$$T = 2T_1,$$

где  $T_1$  — момент сил сопротивления на каждом колесе (колеса имеют одинаковое функциональное назначение);

$$T_1 = \frac{T}{2} = \frac{239}{2} = 119,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для наглядности и удобства рассмотрим отдельно моменты сил и силы, действующие на вал в местах размещения шкива и каждого зубчатого колеса. Силы будут рассматриваться приложенными в центре поперечного сечения вала.

На этом этапе расчета вал считаем абсолютно твердым телом, что позволяет использовать правило параллельного переноса сил.

Рассмотрим сечение вала под шкивом ременной передачи (рис. 7.2).

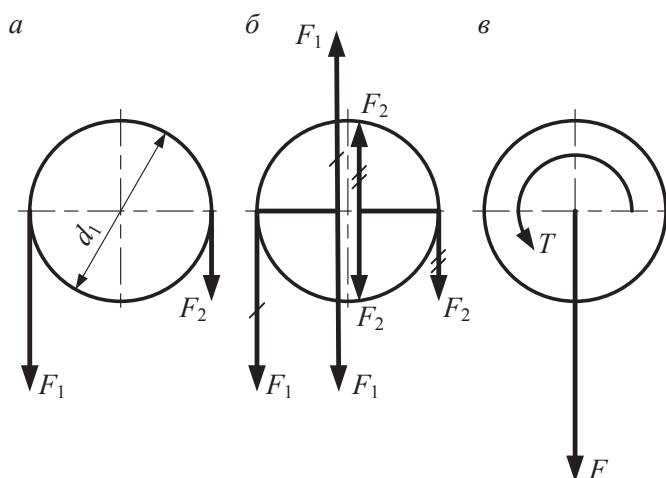


Рис. 7.2

Силы  $F_1$  и  $F_2$  — силы натяжения ветвей ременной передачи (рис. 7.2, а).

Приложим в центре тяжести шкива (рис. 7.2, б) нулевой вектор из двух равнопротивоположных сил, равных и параллельных  $F_1$ , и нулевой вектор из двух равнопротивоположных сил, равных и параллельных  $F_2$ . При этом  $F_1 = 2F_2$  по условию задачи. Нагрузка состоит из двух пар сил и двух сосредоточенных сил ( $F_1$  и  $F_2$ ), приложенных в центре шкива.

Алгебраическая сумма моментов пар сил

$$F_1 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2}$$

образует вращающий момент  $T$ :

$$T = F_1 \frac{d_1}{2} - F_2 \frac{d_1}{2} = F_2 \frac{d_1}{2},$$

откуда

$$F_2 = 2 \frac{T}{d_1} = 2 \cdot \frac{239}{0,2} = 2\,390 \text{ Н.}$$

$$F_1 = 2F_2 = 2 \cdot 2\,390 = 4\,780 \text{ Н.}$$

Суммарная сила  $F$ , приложенная к центру шкива,

$$F = F_1 + F_2 = 4\,780 + 2\,390 = 7\,170 \text{ Н.}$$

Вращающий момент  $T = 239 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и сила  $F = 7\,170 \text{ Н}$  действуют в направлении, указанном на рис. 7.2, в.

Рассмотрим силы, действующие на зубчатые колеса (рис. 7.3, а, б).

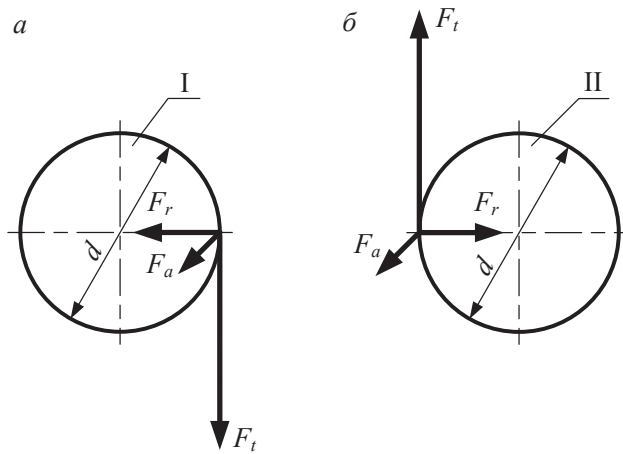


Рис. 7.3

Колесо, расположенное на валу между шкивом и другим колесом, будем обозначать на рис. 7.3...7.5 — I, второе колесо — II.

Силы, касательные к окружности зубчатых колес  $F_t$ , называются окружными. Силы, параллельные оси вала  $F_a$ , называются осевыми. Силы, действующие вдоль радиуса к центру колес  $F_r$ , называются радиальными.

Выполним параллельный перенос сил  $F_t$  (рис. 7.4, а) в центр тяжести колес (рис. 7.4, б).

В результате получим моменты сил сопротивления  $T_1$  в сечении каждого колеса и окружную силу  $F_t$ , приведенную к центру тяжести сечения вала (рис. 7.4, в).

$$T_1 = F_t \frac{d}{2}.$$

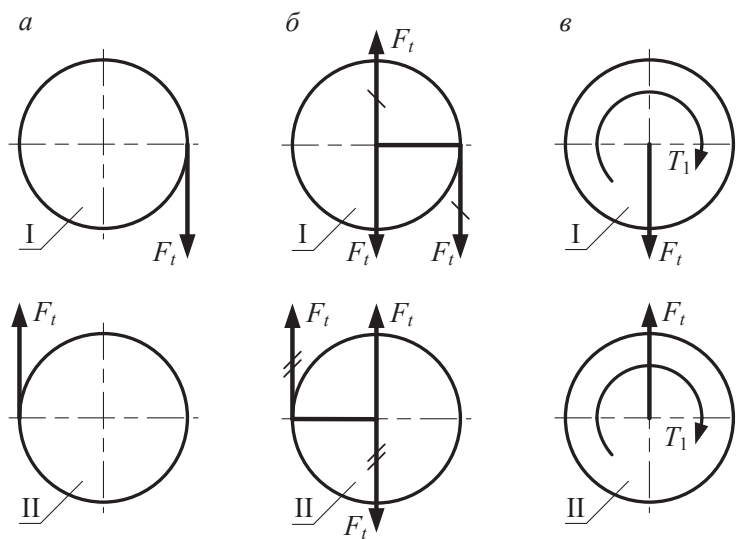


Рис. 7.4

Поскольку

$$T_1 = \frac{T}{2},$$

то

$$F_t = \frac{T}{d} = \frac{239}{0,063} = 3794 \text{ Н.}$$

По условию  $F_r = 0,38F_t$  и  $F_a = 0,15F_r$ .

Определяем

$$F_r = 0,38 \cdot 3794 = 1442 \text{ Н,}$$

$$F_a = 0,15 \cdot 3794 = 569 \text{ Н.}$$

Выполним параллельный перенос сил  $F_a$  (рис. 7.5, а, б) в центр тяжести колес.

В результате получим изгибающие моменты в сечении каждого колеса  $|M_I| = |M_{II}|$  и осевую силу  $F_a$ , действующую из центра колеса вдоль оси вала:



$$|M_I| = |M_{II}| = F_a \frac{d}{2} = 569 \cdot \frac{0,063}{2} = 18 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Радиальные силы  $F_r$  переносим вдоль линии их действия; дополнительных моментов они не создадут.

Силы, действующие на шкив и колеса, приведены к центру поперечного сечения вала в местах посадки этих деталей на вал.

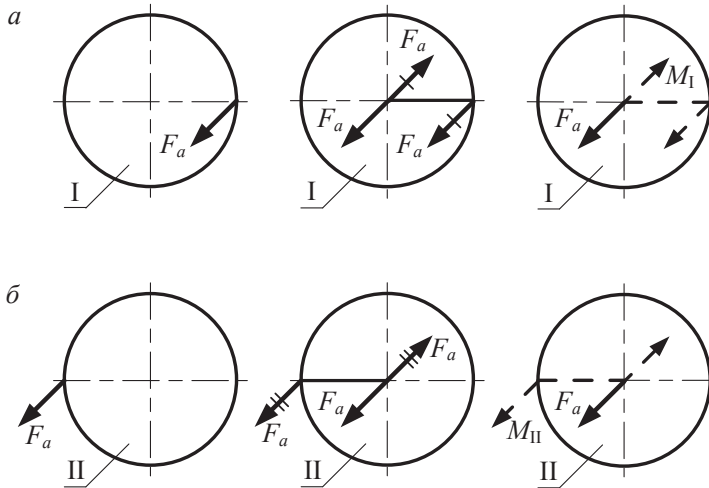


Рис. 7.5

Следует отметить, что от действия вращающих моментов  $T$  и  $T_I$  вал испытывает деформацию кручения; от действия изгибающих моментов  $M_I$  и  $M_{II}$  и от действия сил  $F$ ,  $F_r$ ,  $F_t$ , приведенных к оси вала, — деформацию изгиба; от действия осевых сил  $F_a$  — деформацию сжатия.

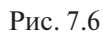
Составим общую схему нагружения вала (рис. 7.6, а). Рассмотрим последовательно системы сил и моментов, действующих на вал в вертикальной  $XU$  и в горизонтальной  $XZ$  плоскостях.

## 2. Эпюры крутящего момента $M_k$ , изгибающих моментов $M_z$ и $M_y$ , нормальных сил $N$

Схему нагружения вала разобьем на участки I, II, III, IV сечениями 1...5.

- Построение эпюры крутящих моментов  $M_k$

В сечениях вала 1, 3, 4 приложены вращающие моменты соответственно  $T = 239 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $T_I = 119,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и  $T_{II} = 119,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Направление моментов указано на рис. 7.6, а.



При построении эпюры  $M_k$  используем методику построения эпюр крутящих моментов, приведенную в методуказаниях «Прикладная механика» Л. П. Вязковой (Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2007. — 55 с.):

$$M_{kI} = M_{kII} = T = 239 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{kIII} = T - T_1 = 239 - 119,5 = 119,5 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{kIV} = T - T_1 - T_1 = 239 - 119,5 - 119,5 = 0.$$

Строим эпюру  $M_k$  (рис. 7.6, б).

- Построение эпюры изгибающих моментов  $M_z$  в плоскости  $XU$

В вертикальной плоскости  $XU$  вал подвержен изгибу силами  $F$ ,  $F_t$  и  $F_r$ . Расчетная схема вала приведена на рис. 7.6, в.

Определяем вертикальные составляющие опорных реакций. Для этого составим уравнения равновесий — суммы моментов всех сил относительно опор  $A$  и  $B$ , предварительно задавшись направлением вертикальных составляющих реакций:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-F \cdot 1,2l + F_t l - F_t \cdot 2,2l + R_{By} \cdot 3,2l = 0.$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-F \cdot 4,4l + R_{Ay} \cdot 3,2l - F_t \cdot 2,2l + F_t \cdot l = 0.$$

Определяем  $R_{By}$  и  $R_{Ay}$ :

$$R_{By} = (F + F_t) \cdot \frac{1,2}{3,2} = (7170 + 3794) \cdot \frac{1,2}{3,2} = 4111,5 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = \frac{4,4F + 1,2F_t}{3,2} = \frac{4,4 \cdot 7170 + 1,2 \cdot 3794}{3,2} = 11281,5 \text{ Н}.$$

Проверим правильность нахождения реакций  $R_{By}$  и  $R_{Ay}$ , для чего составим третье уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на ось  $Y$ :

$$\Sigma F_y = 0;$$

$$-F + R_{Ay} - F_t + F_t - R_{By} = -7170 + 11281,5 - 4111,5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Находим значения  $M_z$  в сечениях вала, соответствующих границам участков:

$$M_{z1} = 0;$$

$$M_{z2} = -F \cdot 1,2l = -7170 \cdot 1,2 \cdot 0,1 = -860 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{z3} = -F \cdot 2,2l + R_{Ay}l = -7170 \cdot 2,2 \cdot 0,1 + 11281,5 \cdot 0,1 = -449 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\begin{aligned} M_{z4} &= -F \cdot 3,4l + R_{Ay} \cdot 2,2l - F_t \cdot 1,2l = \\ &= -7170 \cdot 3,4 \cdot 0,1 + 11281,5 \cdot 2,2 \cdot 0,1 - 3794 \cdot 1,2 \cdot 0,1 = -411 \text{ Н}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

$$M_{z5} = 0 \text{ (опора на конце балки).}$$

По найденным числовым значениям строим эпюру  $M_z$  (рис. 7.6, з).

- Построение эпюры изгибающих моментов  $M_y$  в плоскости  $XZ$

В горизонтальной плоскости в сечениях 3 и 4 на вал действуют силы  $F_r$  и изгибающие моменты  $M'$  и  $M''$ , причем  $|M'| = |M''| = F_a d/2$ . Расчетная схема вала представлена на рис. 7.6, д.

Определяем горизонтальные составляющие опорных реакций  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$ , предварительно задавшись их направлением. Составим уравнения равновесий — суммы моментов всех сил относительно опор  $A$  и  $B$  вала:

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$M' - F_r l - M'' + F_r \cdot 2,2l - R_{Bz} \cdot 3,2l = 0.$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-R_{Az} \cdot 3,2l + M' + F_r \cdot 2,2l - M'' - F_r l = 0.$$

$$R_{Bz} = \frac{1,2F_r}{3,2} = \frac{1,2 \cdot 1442}{3,2} = 540,8 \text{ Н};$$

$$R_{Az} = \frac{1,2F_r}{3,2} = \frac{1,2 \cdot 1442}{3,2} = 540,8 \text{ Н}.$$

Проверим правильность нахождения реакций  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$ . Составим третье уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на ось  $Z$ :

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$-R_{Az} + F_r - F_r + R_{Bz} = 0$$

или

$$\begin{aligned}-R_{Az} + R_{Bz} &= 0; \\ -540,8 + 540,8 &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, реакции определены правильно.

Находим значения  $M_y$  в сечениях вала, соответствующих границам участков:

$$\begin{aligned}\Sigma M_{y1} &= 0; \\ \Sigma M_{y2} &= 0.\end{aligned}$$

В сечениях 3 и 4 действуют моменты  $M'$  и  $M''$  соответственно, поэтому для этих сечений вала момент определяем дважды — левее и правее каждого сечения:

$$\begin{aligned}M_{y3Л} &= -R_{Ay}l = -540,8 \cdot 0,1 = -54 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_{y3П} &= M_{y3Л} + M' = -54 + 18 = -36 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_{y4Л} &= -R_{Ay} \cdot 2,2l + F_r \cdot 1,2l + M' = \\ &= -540,8 \cdot 2,2 \cdot 0,1 + 1442 \cdot 1,2 \cdot 0,1 + 18 = 72 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_{y4П} &= M_{y4Л} - M'' = 72 - 18 = 54 \text{ Н}\cdot\text{м}; \\ M_{y5} &= 0.\end{aligned}$$

По найденным числовым значениям строим эпюру  $M_y$  (рис. 7.6, е).

- Построение эпюры нормальных сил  $N$

Осевые нагрузки, действующие вдоль оси  $X$ , воспринимаются только радиально-упорным подшипником (в нашем случае левой опорой). Схема нагружения вала в направлении оси  $X$  представлена на рис. 7.6, ж.

Определяем осевые составляющие опорных реакций. Составим уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на ось  $X$ :

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; \\ R_{Ax} - F_a - F_a &= 0.\end{aligned}$$

Находим

$$R_{Ax} = 2F_a = 2 \cdot 569 = 1138 \text{ Н}.$$

Определяем  $N$  по участкам:

$$N_1 = 0;$$

$$N_{II} = -R_{Ax} = -1\,138 \text{ Н};$$

$$N_{III} = -R_{Ax} + F_a = -1\,138 + 569 = -569 \text{ Н};$$

$$N_{IV} = -R_{Ax} + F_a + F_a = -1\,138 + 569 + 569 = 0.$$

На всех участках — сжатие. Более подробно методика нахождения нормальных сил  $N$  рассмотрена в методуказаниях «Механика» Л. П. Вязковой (В 3 ч., ч. 1. — Екатеринбург: УГТУ—УПИ, 2006. — 28 с.).

По найденным числовым значениям строим эпюру  $N$  (рис. 7.6, з).

### 3. Определение диаметра вала

Определяем величины суммарных изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$  в характерных сечениях:

$$M_1 = 0;$$

$$M_2 = M_{2z} = -860 \text{ Н·м};$$

$$M_3 = \sqrt{M_{3z}^2 + M_{3y}^2} = \sqrt{(-449)^2 + (-54)^2} = 452 \text{ Н·м};$$

$$M_4 = \sqrt{M_{4z}^2 + M_{4y}^2} = \sqrt{(-411)^2 + 72^2} = 417 \text{ Н·м};$$

$$M_5 = 0.$$

Анализ эпюр внутренних силовых факторов и величины суммарных изгибающих моментов показывает, что опасным является сечение 2, где действуют наибольшие суммарный изгибающий и крутящий моменты, а также максимальная продольная сила.

По четвертой теории прочности определяем эквивалентный момент  $M_p$  для второго сечения вала:

$$M_p = \sqrt{M_2^2 + 0,75 M_{k2}^2} = \sqrt{(-860)^2 + 0,75 \cdot 239^2} = 885 \text{ Н·м}.$$

Определяем диаметр вала:

$$d_b \geq \sqrt[3]{\frac{M_p}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{885}{0,1 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 5,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Полученное значение округляем по ГОСТ 6636–69 до ближайшего большего значения — 60 мм.

В данной задаче вал испытывает не только изгиб с кручением, но и сжатие (влиянием поперечных сил пренебрегаем). Поэтому следует выполнить проверочный расчет для вала диаметром 60 мм с учетом осевого нагружения:

$$\sigma_{\max}^{\text{экв}} = \sqrt{\left(-\frac{M_2}{W_z} - \frac{N_2}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\kappa 2}}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma],$$

где  $W_z$  — осевой момент сопротивления изгибу,  $W_z = 0,1d_B^3$ ;  $A$  — площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi d_B^2}{4};$$

$W_p$  — полярный момент сопротивления кручению:

$$W_p = 0,2d_B^3.$$

$$\sigma_{\max}^{\text{экв}} = \sqrt{\left(-\frac{860}{0,1 \cdot 0,06^3} - \frac{1138 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,06^2}\right)^2 + 3\left(\frac{239}{0,2 \cdot 0,06^3}\right)^2} = 41,3 \text{ МПа}.$$

Условие прочности  $\sigma_{\max}^{\text{экв}} \leq [\sigma]$  выполняется.

### Задача № 9

На вал действуют силы  $F_t$  и  $F_r$  от зубчатого зацепления шестерни с колесом ( $F_r = 0,38F_t$ ) и силы натяжения ветвей ремня  $F_1$  и  $F_2$  ременной передачи ( $F_1 = 2F_2$ ). Силы  $F_1$  и  $F_2$  направлены под углом  $\alpha$  к вертикали.

Проверить прочность вала редуктора в сечениях под шестерней и левым подшипником (рис. 7.7), если известно, что вал вращается с постоянной угловой скоростью, изготовлен из стали марки 45 с пределом текучести  $\sigma_T$  и допускаемым коэффициентом запаса прочности  $[S]$ .

Передаваемая мощность  $P$ , частота вращения  $n$ , диаметр шкива  $D$ , диаметры шестерни  $d$  и вала под шестерней  $d_1$ , диаметр вала под подшипниками  $d_2$ , линейные размеры  $a$  и  $b$  известны.

При расчете использовать четвертую теорию прочности.

Дано:

$$P = 12 \text{ кВт},$$

$$n = 382 \text{ мин}^{-1},$$

$$D = 200 \text{ мм},$$

$$d = 68 \text{ мм},$$

$$d_1 = 35 \text{ мм},$$

$$d_2 = 30 \text{ мм},$$

$$a = 120 \text{ мм},$$

$$b = 100 \text{ мм},$$

$$[S] = 2,$$

$$\sigma_T = 650 \text{ МПа},$$

$$F_r = 0,38 F_t,$$

$$F_1 = 2 F_2,$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

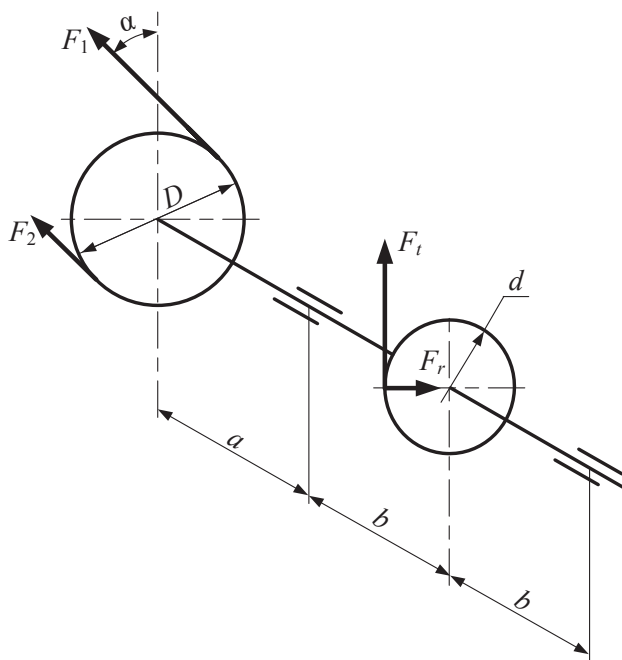


Рис. 7.7

### 1. Составление расчетной схемы вала

Определяем величину внешнего вращающего момента  $T$ :

$$T = 9550 \cdot \frac{P}{n},$$

где  $P$  — мощность, кВт;  $n$  — частота вращения,  $\text{мин}^{-1}$ ;

$$T = 9550 \cdot \frac{12}{382} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вал вращается с постоянной скоростью, следовательно, момент движущих сил  $T$  равен моменту сил сопротивления  $T_1$ :

$$T = T_1,$$

где  $T_1$  — момент сил сопротивления на зубчатом колесе.

Для наглядности и удобства рассмотрим отдельно моменты сил и силы, действующие на вал в местах размещения шкива и зубчатого колеса. Силы будут рассматриваться приложенными в центре тяжести поперечных сечений вала. Приведение сил выполняем на основании леммы о параллельном переносе сил.



Механическое состояние твердого тела не нарушится, если данную силу перенести параллельно самой себе в произвольную точку тела, добавив при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

На этом этапе расчета вал считаем абсолютно твердым телом, что позволяет использовать правило параллельного переноса сил.

Рассмотрим сечение вала под шкивом ременной передачи (рис. 7.8). Здесь  $F_1$  и  $F_2$  — силы натяжения ветвей ременной передачи (рис. 7.8, а).

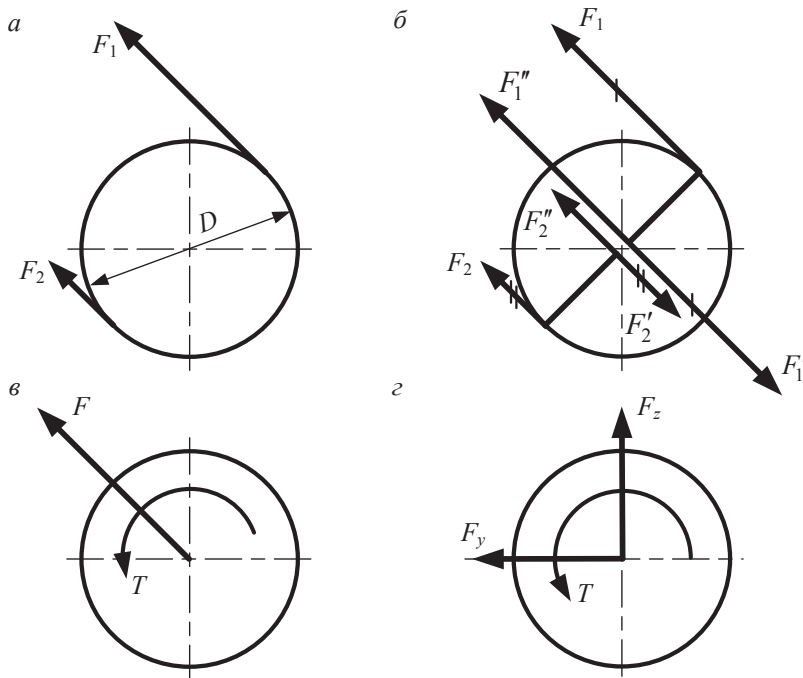


Рис. 7.8

Величина натяжения в ремнях может быть подсчитана по величине внешнего вращающего момента  $T$  следующим образом. Приложим в центре тяжести шкива (рис. 7.8, б) нулевой вектор из двух равнопротивоположных сил  $F'_1$  и  $F''_1$ , равных и параллельных  $F_1$ , и нулевой вектор из двух равнопротивоположных сил  $F'_2$  и  $F''_2$ , равных и параллельных  $F_2$ . Нагрузка на шкив состоит из двух пар сил ( $F_1 D/2$  и  $F_2 D/2$ ) и суммы двух сосредоточенных сил ( $F''_1$  и  $F''_2$ ,  $F_1 = 2F_2$ ), приложенных в центре шкива.

Алгебраическая сумма моментов пар сил

$$F_1 \frac{D}{2} - F_2 \frac{D}{2}$$

образует вращающий момент  $T$ , т. е.

$$T = F_1 \frac{D}{2} - F_2 \frac{D}{2} = F_2 \frac{D}{2}.$$

Отсюда

$$F_2 = 2 \frac{T}{D} = 2 \cdot \frac{300}{0,2} = 3\,000 \text{ Н.}$$

$$F_1 = 2F_2 = 2 \cdot 3\,000 = 6\,000 \text{ Н.}$$

Вращающий момент  $T = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и сила  $F = 9\,000 \text{ Н}$  действуют в направлении, указанном на рис. 7.8, *в*.

Разложим силу  $F$  на вертикальную  $F_z$  и горизонтальную  $F_y$  составляющие (рис. 7.8, *г*):

$$F_z = F \cos \alpha = 9\,000 \cos 45^\circ = 6\,364 \text{ Н;}$$

$$F_y = F \sin \alpha = 9\,000 \sin 45^\circ = 6\,364 \text{ Н.}$$

Рассмотрим силы, действующие на зубчатое колесо (рис. 7.9).

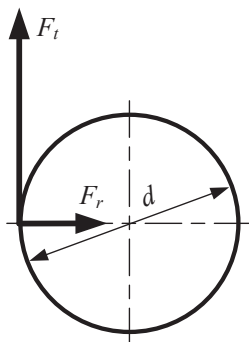


Рис. 7.9

Силы, касательные к окружности зубчатых колес  $F_t$ , называются окружными, а действующие вдоль радиуса к центру колес  $F_r$  — радиальными.

Приведем силу  $F_t$  (рис. 7.10, *а*) к центру тяжести сечения вала. Приложим в центре тяжести шестерни (рис. 7.10, *б*) нулевой вектор из двух

равнопротивоположных сил  $F'_t$  и  $F''_t$ , равных и параллельных  $F_t$ . Силы  $F_t$  и  $F'_t$  образуют пару сил. Момент пары сил  $F_t d/2$  равен моменту сил сопротивления  $T_1$ , т. е.  $T_1 = F_t d/2$ .

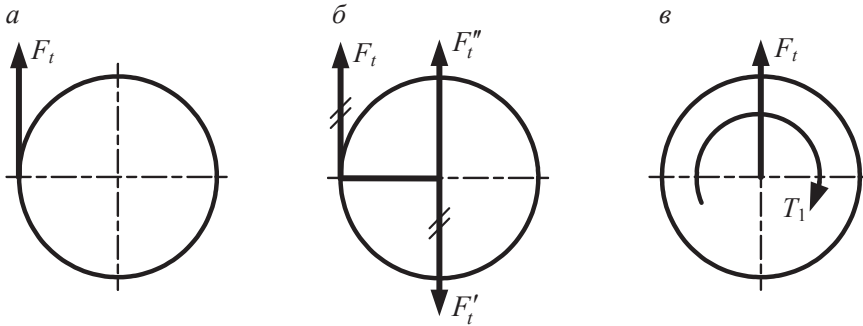


Рис. 7.10

Момент  $T_1$  действует в направлении, показанном на рис. 7.10, в. Окружная сила  $F_t$  приведена к центру тяжести сечения вала.

Вал вращается с постоянной угловой скоростью, следовательно, момент сил движущих  $T$  равен моменту сил сопротивления  $T_1$ .

Поэтому

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2 \cdot 300}{0,068} = 8824 \text{ Н.}$$

По условию  $F_r = 0,38F_t$ . Определяем

$$F_r = 0,38 \cdot 8824 = 3353 \text{ Н.}$$

Радиальную силу  $F_r$  переносим в центр тяжести сечения вала вдоль линии ее действия, дополнительного момента она не создаст.

Моменты  $T$ ,  $T_1$  и силы, действующие на шкив и колесо, приведенные к центру тяжести поперечных сечений вала в местах посадки этих деталей на вал, представлены на расчетной схеме вала (рис. 7.11, а).

Следует отметить, что от действия вращающих моментов  $T$  и  $T_1$  вал испытывает деформацию кручения; от действия сил  $F_z$ ,  $F_y$ ,  $F_t$ ,  $F_r$ , приведенных к оси вала, — деформацию пространственного изгиба. В вертикальной плоскости  $ZX$  вал нагружен силами  $F_z$  и  $F_t$ , в горизонтальной плоскости  $YX$  — силами  $F_y$  и  $F_r$ .

2. Построение эюр  $M_K$ ,  $M_z$ ,  $M_y$

Расчетную схему силового нагружения вала (рис. 7.11, а) разобьем на участки I, II, III сечениями 1...4.

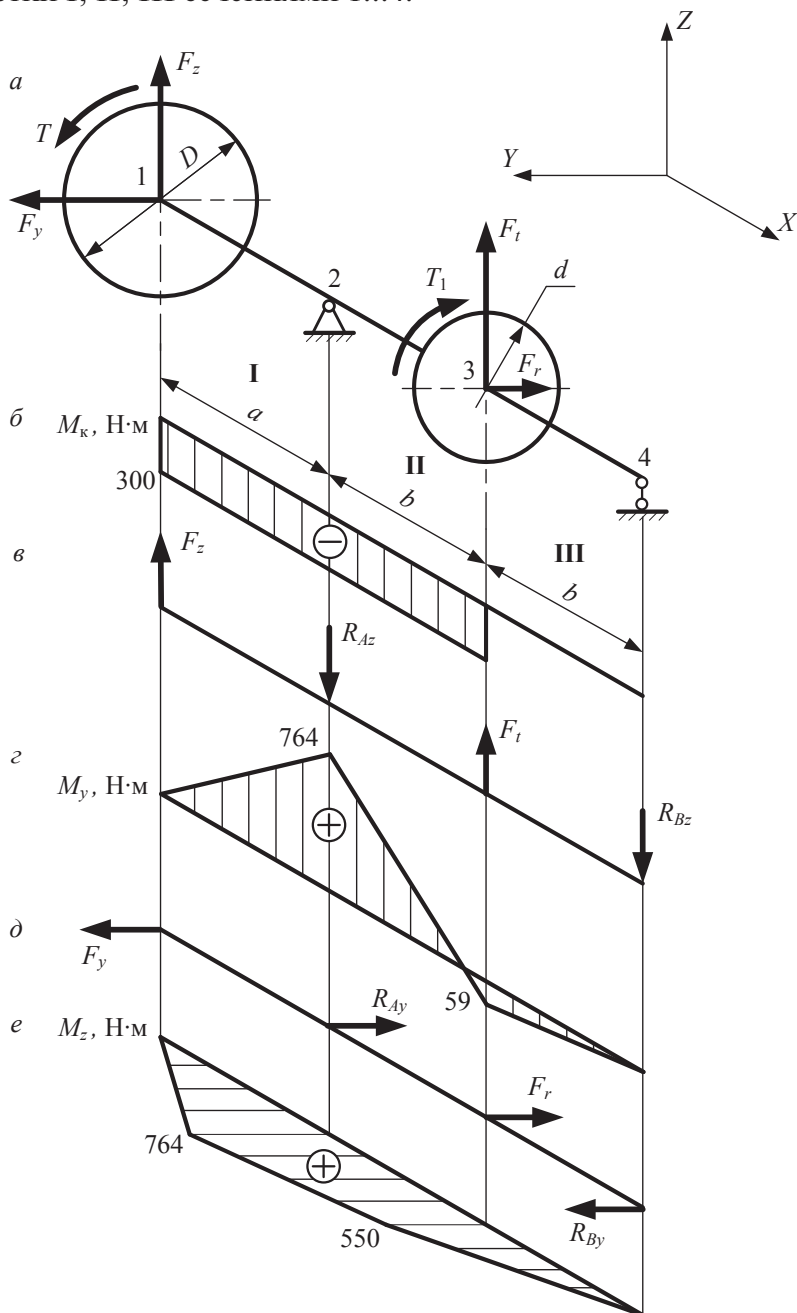


Рис. 7.11

- Построение эпюры крутящих моментов  $M_k$

В характерных сечениях вала 1 и 3 приложены вращающие моменты  $|T| = |T_1| = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , скручивающие вал в противоположных направлениях.

При построении эпюры  $M_k$  используем методику построения эпюр крутящих моментов.

$$M_{kI} = M_{kII} = -300 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{kIII} = 0.$$

Строим эпюру  $M_k$  (рис. 7.11, б).

Построение эпюр изгибающих моментов выполним отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Эпюра моментов на каждом участке — наклонная прямая с точками перелома в характерных сечениях, в которых приложены силы. Такой характер эпюр объясняется отсутствием на расчетных схемах распределенной нагрузки и сосредоточенных моментов. При построении эпюр достаточно определить числовые значения моментов в характерных сечениях.

В целях повышения наглядности эпюр  $M_k$ ,  $M_z$ ,  $M_y$  построим в аксонометрии. При решении задач допускается совмещение плоскости размещения эпюр с плоскостью листа.

- Построение эпюры изгибающих моментов  $M_y$  в вертикальной плоскости  $ZX$

В вертикальной плоскости вал подвержен изгибу силами  $F_z$  и  $F_t$ . Расчетная схема вала приведена на рис. 7.11, в.

Определяем вертикальные составляющие опорных реакций. Для этого составим уравнения равновесий — суммы моментов всех сил относительно опор  $A$  и  $B$ , предварительно задавшись направлением вертикальных составляющих реакций  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$ :

$$\sum M_A = 0, \quad F_z a - F_t b + R_{Bz} \cdot 2b = 0;$$

$$\sum M_B = 0, \quad F_z(a + 2b) - R_{Az} \cdot 2b + F_t b = 0.$$

Определяем  $R_{Bz}$  и  $R_{Az}$ :

$$R_{Bz} = \frac{-F_z a + F_t b}{2b} = \frac{-6364 \cdot 0,12 + 8824 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,1} = 593,6 \text{ Н};$$

$$R_{Az} = \frac{F_z(a+2b) + F_t b}{2b} = \frac{6\,364(0,12 + 0,1 + 0,1) + 8\,824 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,1} = 14\,594,4 \text{ Н.}$$

Если значения реакций  $R_{Az}$  и  $R_{Bz}$  получаются отрицательными, необходимо их направление, ранее принятое произвольно, изменить на противоположное.

Проверим правильность нахождения реакций  $R_{Bz}$  и  $R_{Az}$ , для чего составим третье уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на ось  $Z$ :

$$\sum F_z = 0; \quad F_z - R_{Az} + F_t - R_{Bz} = 6\,364 - 14\,594,4 + 8\,824 - 593,6 = 0.$$

Следовательно, реакции определены верно.

Находим значения  $M_y$  в характерных сечениях вала в плоскости  $XZ$ :

$$M_{y1} = 0;$$

$$M_{y2} = F_z a = 6\,364 \cdot 0,12 = 764 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{y3} = F_z(a+b) - R_{Az}b = 6\,364(0,12 + 0,1) - 14\,594,4 \cdot 0,1 = -59 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{y4} = F_z(a+2b) - R_{Az} \cdot 2b + F_t b = 6\,364(0,12 + 2 \cdot 0,1) - 14\,594,4 \cdot 2 \cdot 0,1 + 8\,824 \cdot 0,1 = 0.$$

Расчет величины изгибающего момента в четвертом сечении можно было не выполнять, так как опора расположена на конце балки и  $M_{y4} = 0$ .

По найденным числовым значениям строим эпюру  $M_y$  (см. рис. 7.11,  $z$ ).

- Построение эпюры изгибающих моментов  $M_z$  в горизонтальной плоскости  $XY$

В горизонтальной плоскости в сечениях 1 и 3 на вал действуют силы  $F_y$  и  $F_r$ . Расчетная схема вала представлена на рис. 7.11,  $z$ .

Определяем горизонтальные составляющие опорных реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$ , предварительно задавшись их направлением. Составим уравнения равновесий — суммы моментов всех сил относительно опор  $A$  и  $B$ :

$$\sum M_A^r = 0; \quad -F_y a - F_r b + R_{By} \cdot 2b = 0;$$

$$\sum M_B^r = 0; \quad -F_y(a+2b) + R_{Ay} \cdot 2b + F_r b = 0.$$

Определяем  $R_{By}$  и  $R_{Ay}$ :

$$R_{By} = \frac{F_y a + F_r b}{2b} = \frac{6\,364 \cdot 0,12 + 3\,353 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,1} = 5\,494,9 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = \frac{F_y(a + 2b) - F_r b}{2b} = \frac{6\,364(0,12 + 2 \cdot 0,1) - 3\,353 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,1} = 8\,505,9 \text{ Н.}$$

Если значения реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  получаются отрицательными, необходимо их направление, ранее принятое произвольно, изменить на противоположное. Проверим правильность нахождения реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$ , составим третье уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на ось  $Y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0; \quad F_y - R_{Ay} - F_r + R_{By} = 0; \\ 6\,364 - 8\,505,9 - 3\,353 + 5\,494,9 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, реакции определены правильно. Находим значения  $M_z$  в сечениях вала, соответствующих границам участков:

$$\begin{aligned} M_{z1} &= 0; \\ M_{z2} &= F_y a = 6\,364 \cdot 0,12 = 764 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_{z3} &= F_y(a + b) - R_{Ay} b = 6\,364(0,12 + 0,1) - 8\,505,9 \cdot 0,1 = 550 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ M_{z4} &= 0. \end{aligned}$$

По найденным числовым значениям строим эпюру  $M_y$  (см. рис. 7.11, е).

### 3. Проверка прочности вала в опасных сечениях

Выполним проверку прочности вала в сечениях под левым подшипником и шестерней.

Коэффициент запаса прочности в сечении вала:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}},$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести стали;  $\sigma_{\text{экв}}$  — эквивалентное напряжение в сечении вала.

Величина эквивалентного напряжения определяется по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_p}{W_{\text{и}}},$$

где  $M_p$  — эквивалентный момент;  $W_{\text{и}}$  — осевой момент сопротивления изгибу сечения вала.

Эквивалентный момент при расчете по четвертой теории прочности находим по формуле

$$M_p = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2},$$

где  $M_{\text{и}}$  — суммарный изгибающий момент в сечении вала;  $M_{\text{к}}$  — крутящий момент в сечении.

Определяем величины суммарных изгибающих моментов в характерных сечениях 2 и 3:

$$M_{\text{и}2} = \sqrt{M_{z2}^2 + M_{y2}^2} = \sqrt{764^2 + 764^2} = 1080 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{и}3} = \sqrt{M_{z3}^2 + M_{y3}^2} = \sqrt{550^2 + (-59)^2} = 553 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По четвертой теории прочности определяем эквивалентные моменты для второго и третьего сечений вала:

$$M_{\text{р}2} = \sqrt{M_{\text{и}2}^2 + 0,75M_{\text{к}2}^2} = \sqrt{1080^2 + 0,75 \cdot 300^2} = 1111 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{р}3} = \sqrt{M_{\text{и}3}^2 + 0,75M_{\text{к}3}^2} = \sqrt{553^2 + 0,75 \cdot 300^2} = 610 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Осевые моменты сопротивления изгибу поперечных сечений вала:

- $W_{\text{и}2}$  в сечении 2 (под левым подшипником):

$$W_{\text{и}2} = 0,1d_2^3 = 0,1 \cdot 30^3 = 2700 \text{ мм}^3;$$

- $W_{\text{и}3}$  в сечении 3 (под шестерней при посадке шестерни на гладкий вал):

$$W_{\text{и}3} = 0,1d_1^3 = 0,1 \cdot 35^3 = 4288 \text{ мм}^3.$$

При посадке детали на вал диаметром  $d$  с одним шпоночным пазом в сечении вала (рис. 7.12) осевой момент сопротивления  $W_{\text{и}}$  определяется по формуле

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d},$$

где  $b$  — ширина;  $t_1$  — глубина шпоночного паза на валу;  $d$  — диаметр вала.

В третьем сечении вала по условию задачи диаметр вала равен 35 мм, размеры шпоночного паза по ГОСТ 23369–78:  $b = 10$  мм,  $t_1 = 5$  мм.

Определяем осевой момент сопротивления  $W'_{\text{и}3}$  под шестерней при посадке шестерни на вал с использованием шпоночного соединения

$$W'_{\text{и}3} = \frac{\pi 35^3}{32} - \frac{10 \cdot 5(35-5)^2}{2 \cdot 35} = 3564 \text{ мм}^3.$$



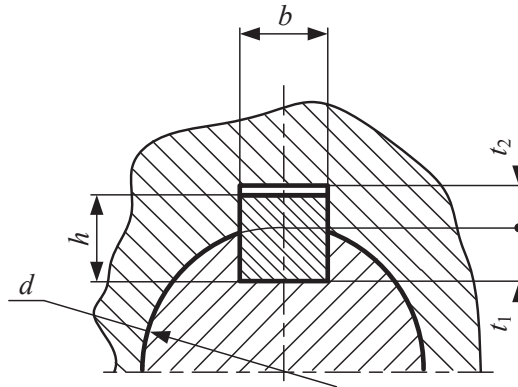


Рис. 7.12

Определяем эквивалентные напряжения в сечениях вала  $\sigma_{\text{экв}}$ :

- $\sigma_{\text{экв}2}$  под левым подшипником:

$$\sigma_{\text{экв}2} = \frac{M_{\text{P}2}}{W_{\text{и}2}} = \frac{1111 \cdot 10^3}{2700} = 411 \text{ МПа};$$

- $\sigma_{\text{экв}3}$  под шестерней при посадке на гладкий вал:

$$\sigma_{\text{экв}3} = \frac{M_{\text{P}3}}{W_{\text{и}3}} = \frac{610 \cdot 10^3}{4288} = 142 \text{ МПа};$$

- $\sigma'_{\text{экв}3}$  под шестерней при посадке шестерни с использованием шпоночного соединения:

$$\sigma'_{\text{экв}3} = \frac{M_{\text{P}3}}{W'_{\text{и}3}} = \frac{610 \cdot 10^3}{3564} = 171 \text{ МПа}.$$

Определяем коэффициенты запаса прочности  $S$ :

- $S_2$  под левым подшипником:

$$S_2 = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{экв}2}} = \frac{650}{411} = 1,58;$$

- $S_3$  под шестерней при посадке на гладкий вал:

$$S_3 = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma_{\text{экв}3}} = \frac{650}{142} = 4,57;$$

- $S'_3$  под шестерней при посадке с использованием шпоночного соединения:

$$S'_3 = \frac{\sigma_{\text{T}}}{\sigma'_{\text{экв}3}} = \frac{650}{171} = 3,8.$$

Сравнивая найденные значения  $S$  с допускаемым коэффициентом запаса прочности  $[S] = 2$ , видим, что условие прочности для сечения вала под левым подшипником не выполняется, поэтому при конструировании вала необходимо увеличить диаметр поперечного сечения или выбрать для вала более качественную сталь.

### Задание для самопроверки

Вал (рис. 7.13) вращается с постоянной скоростью, нагружен системой сил  $F_t$  и  $F_r$  ( $F_r = 0,38F_t$ ), приложенных к зубчатому колесу, и  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_1 = 2F_2$ ), приложенных к шкиву ременной передачи. Частота вращения вала  $n = 955 \text{ мин}^{-1}$ , передаваемая мощность  $P = 12 \text{ кВт}$ . Размер  $l = 100 \text{ мм}$ . Диаметр шкива  $D = 200 \text{ мм}$ , диаметр колеса  $d = 80 \text{ мм}$ . Допускаемое напряжение материала вала  $[\sigma] = 50 \text{ МПа}$ .

Построить эпюры крутящего  $M_k$  и изгибающих моментов  $M_y$ ,  $M_z$ . Определить диаметр вала  $d$ .

Дано:

$$P = 12 \text{ кВт},$$

$$n = 955 \text{ мин}^{-1},$$

$$D = 200 \text{ мм},$$

$$d = 80 \text{ мм},$$

$$l = 100 \text{ мм},$$

$$F_r = 0,38F_t,$$

$$F_1 = 2F_2,$$

$$[\sigma] = 50 \text{ МПа}.$$

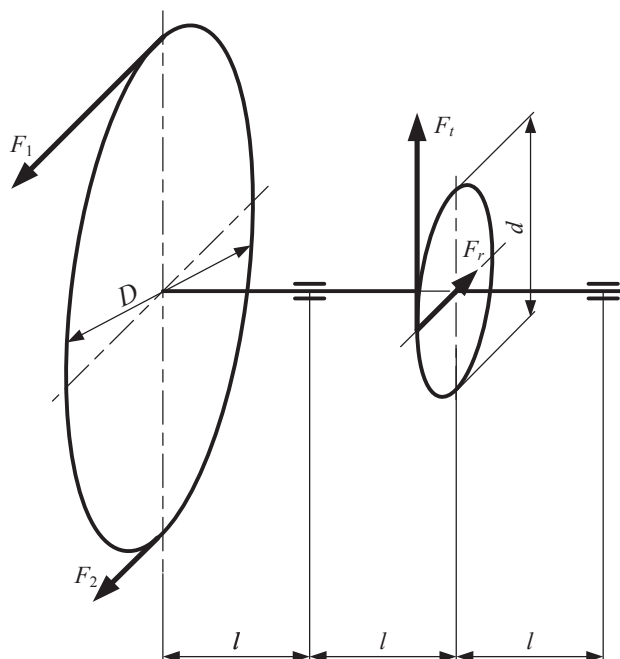


Рис. 7.13

Ответ. Диаметр вала  $d_{\text{вала}} = 42$  мм.

Эпюры  $M_x$  и  $M_y$ ,  $M_z$  представлены на рис. 7.14.

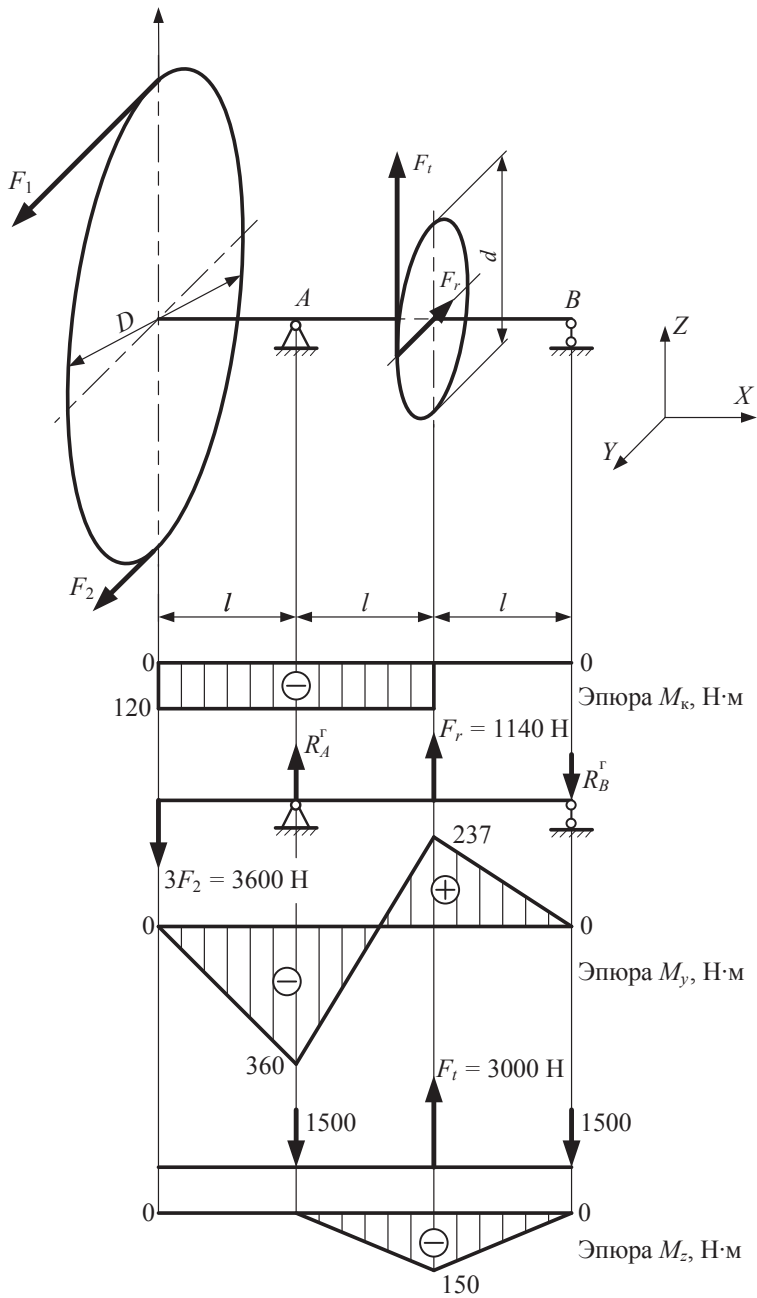


Рис. 7.14

---

## 8. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях

---

### 8.1. Общие положения

---

При определении прочностной надежности из всех переменных нагрузок наибольший интерес представляют *циклические нагрузки*, вызывающие появление в поперечных сечениях детали периодически изменяющиеся напряжения. *Циклом* называется однократное изменение какой-либо величины от максимального значения до минимального и от минимального значения до максимального. При многократном повторении циклов имеем циклическое нагружение.

Напряжения в детали (элементе конструкции) могут изменяться циклически вследствие циклически изменяющейся внешней силы (например, давления газов на поршень двигателя внутреннего сгорания) или вследствие изменения положения детали относительно плоскости нагружения (например, напряжения изгиба в вале механической передачи).

Характер изменения напряжений может быть различным, но в большинстве случаев его можно представить в виде простейших гармоник синусоиды и косинусоиды.

Переменные напряжения могут быть нормальными  $\sigma$  и касательными  $\tau$ .

Цикл перемен напряжений характеризуется рядом параметров, из которых с точки зрения расчета на прочность, наряду с максимальным ( $\sigma_{\max}$ ) и минимальным ( $\sigma_{\min}$ ) напряжениями, наибольший интерес представляют следующие:

- среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

- амплитудное значение

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

- коэффициент асимметрии

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

Величину  $r$  называют также характеристикой цикла.

На рис. 8.1 представлены различные виды циклов переменных напряжений. Нормальные напряжения от действия изгибающего момента при вращении вала вокруг своей оси создают переменную составляющую цикла — синусоиду.

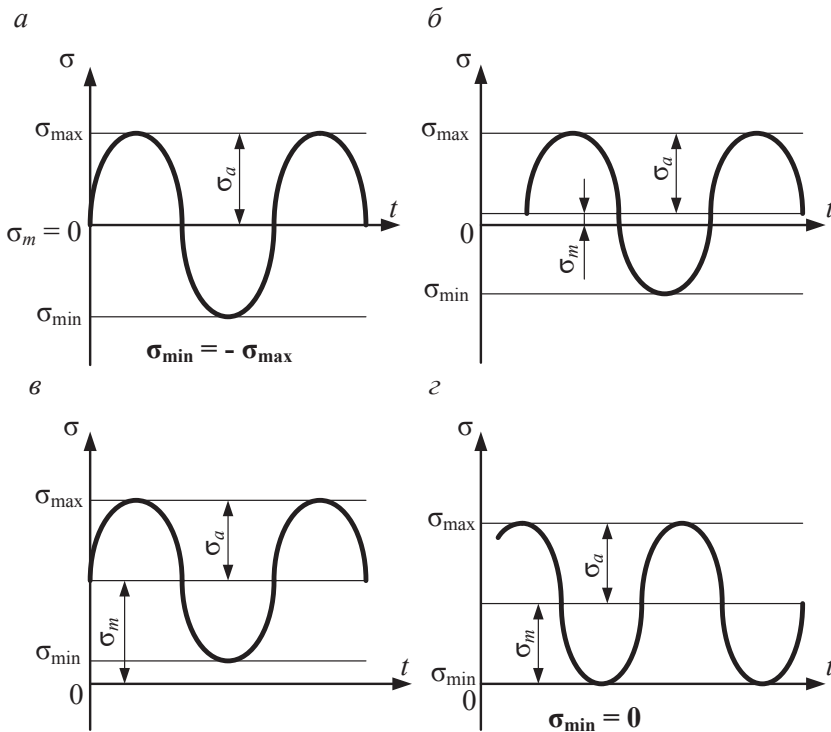


Рис. 8.1

Если  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, цикл называется *симметричным* (рис. 8.1, а). У симметричного цикла коэффициент асимметрии  $r = -1$ , среднее напряжение  $\sigma_m = 0$ , амплитудное значение  $\sigma_a = \sigma_{\max}$ .

В отличие от симметричного цикла все остальные являются *асимметричными* (см. рис. 8.1, б, в, г). Любой асимметричный цикл можно рассматривать как сочетание симметричного цикла с максимальным напряжением, равным амплитуде  $\sigma_a$ , и постоянного напряжения, равного среднему напряжению  $\sigma_m$  этого цикла.

Если  $\sigma_{\min} = 0$ , цикл называется *пульсирующим (отнулевым)*, для которого  $\sigma_{\max} = \sigma$ ,  $\sigma_{\min} = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_m = \sigma/2$ ,  $r = 0$  (см. рис. 8.1, г).

Для переменных касательных напряжений  $\tau$  остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения.

Наибольшую опасность с точки зрения усталостного разрушения представляет симметричный цикл изменения напряжений.

Под действием циклически изменяющихся напряжений происходит разрушение, получившее название *усталостное*. Усталостное разрушение характеризуется следующими моментами:

- происходит внезапно, без видимых пластических деформаций даже для материалов, обладающих при статическом нагружении хорошими пластическими свойствами;
- происходит не сразу, а спустя некоторое, иногда достаточно продолжительное, время после начала нагружения;
- происходит при нагрузках, которым при статическом нагружении деталь сопротивляется вполне надежно.

Механизм усталостного разрушения заключается в возникновении и развитии усталостной трещины, которая приводит к напряженно-деформированному состоянию, характерному для хрупкого разрушения.

Способность детали сопротивляться усталостному разрушению характеризуется пределом выносливости. *Пределом выносливости* называется наибольшее циклически изменяющееся напряжение, которое деталь выдерживает без появления признаков усталостного разрушения неограниченно большое число циклов. Предел выносливости, как и все механические характеристики материалов (предел текучести, предел прочности и т. п.), определяется экспериментально. Схема одной из установок для такого эксперимента представлена на рис. 8.2.

Первый из партии образцов 1 закрепляется во вращающихся зажимах 2 и 3 и с помощью рычажной системы нагружается подвешенным грузом 4, имеющим вес  $F$ . Средняя часть образца испытывает деформацию чистого изгиба.

Изгиб происходит в вертикальной плоскости  $YZ$ , и нормальные напряжения распределены по высоте поперечного сечения образца

пропорционально расстоянию от нейтрального слоя, совпадающего с осью образца (рис. 8.3).

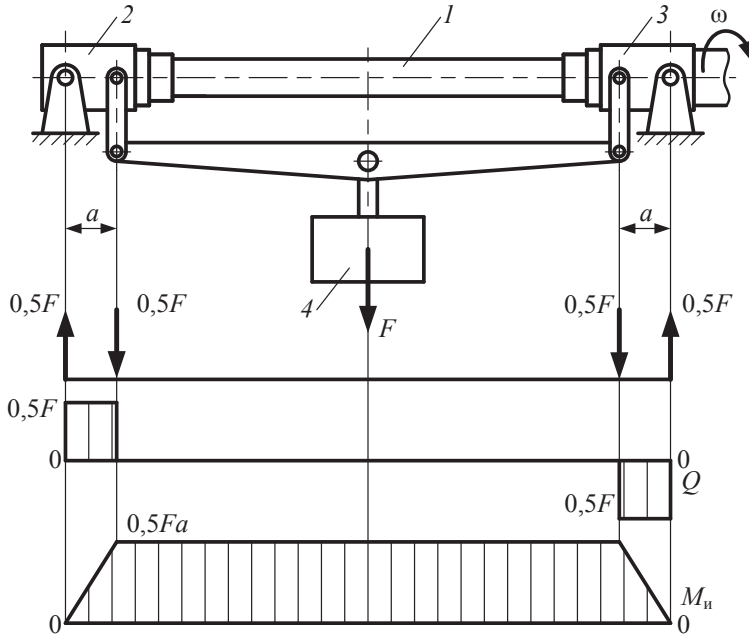


Рис. 8.2

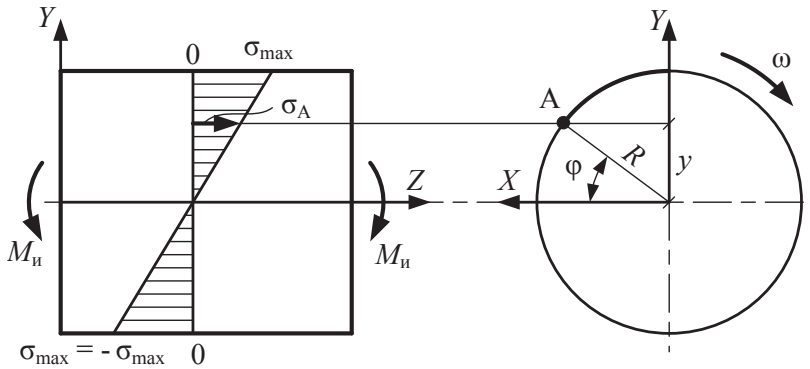


Рис. 8.3

Нормальное напряжение в материальных волокнах в окрестности произвольной точки А, лежащей на поверхности образца,

$$\sigma_A = \frac{M_{\text{и}}}{J_x} y,$$

где  $M_{\text{и}}$  — изгибающий момент,  $M_{\text{и}} = Fa/2$ ;  $J_x$  — момент инерции площади сечения относительно оси  $X$ ;  $y$  — расстояние от точки  $A$  до оси  $X$ ,  $y = R \sin \varphi$ .

Образец приводится во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При этом:

- плоскость нагружения остается неизменной;
- угол  $\varphi = \omega t$ , где  $t$  — время;
- координата точки  $A$  изменяется по закону синуса  $y = R \sin \omega t$ .

Таким же образом изменяются и напряжения:

$$\sigma_A = \frac{M_{\text{и}}}{J_x} R \sin \omega t.$$

График изменения  $\sigma_A$  во времени показан на рис. 8.4:

- при  $t = 0$   $\sigma_A = 0$ , при  $t = \pi/2\omega$   $\sigma_A = \sigma_{\text{max}} = M_{\text{и}} R / J_x$ ;
- так как  $R = y_{\text{max}}$  и  $J_x / y_{\text{max}} = W_x$ , то  $\sigma_{\text{max}} = M_{\text{и}} / W_x$ ;
- при  $t = \pi/\omega$   $\sigma_A = 0$ , при  $t = 3\pi/2\omega$   $\sigma_A = \sigma_{\text{min}} = -M_{\text{и}} / W_x$ .

Таким образом, в этом эксперименте в каждой точке поверхности образца сформирован симметричный цикл перемен напряжений.

Первый образец нагружается таким образом, чтобы максимальное напряжение изгиба составляло  $\sigma_1 = (0,5 \dots 0,6) \sigma_{\text{в}}$ . Спустя некоторое время после начала вращения образец разрушается — происходит остановка двигателя.

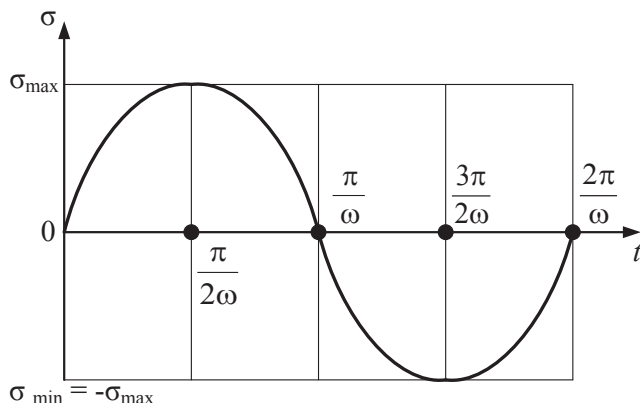


Рис. 8.4

При этом специальный счетчик фиксирует число оборотов, что аналогично числу циклов нагружения образца  $N_1$  до разрушения. Эта ин-



формация позволяет начать построение «кривой усталости», графика в координатах «напряжение — число циклов» (рис. 8.5).

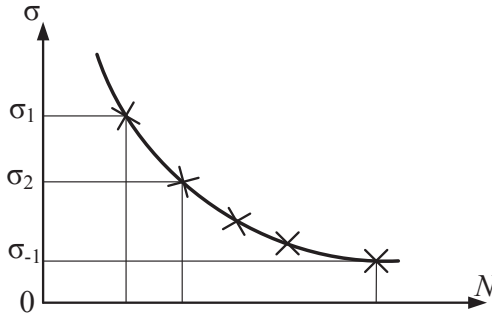


Рис. 8.5

Второй образец нагружается нагрузкой, создающей напряжение  $\sigma_2 < \sigma_1$ , и следовательно, до разрушения выдерживает число циклов перемен напряжений  $N_2 > N_1$ . И таким образом, снижая нагрузку, испытывают следующие образцы. Испытание показывает, что при снижении нагрузки кривая, построенная по экспериментальным точкам, асимптотически приближается к горизонтальной линии, которая соответствует напряжению, равному пределу выносливости. Полагают, что если образец не разрушился при числе циклов, равном  $N_6$ , то он выдержит и бесконечно большое число циклов перемен напряжений. Число циклов  $N_6$  называется базовым. Предел выносливости обозначается  $\sigma_r$ , где  $r$  — коэффициент асимметрии цикла. Например,  $\sigma_{-1}$  — при симметричном цикле,  $\sigma_0$  — при отнулевом.

Пределы выносливости реальных деталей существенно меньше пределов выносливости лабораторных образцов, изготовленных из тех же материалов.

Наиболее существенное влияние на предел выносливости оказывают асимметрия цикла, концентрация напряжений, абсолютные размеры детали и состояние поверхности, характеризующееся шероховатостью и механическими свойствами, формируемыми поверхностно упрочняющими технологиями.

Влияние на предел выносливости асимметрии цикла определяют на основании также экспериментально построенной «кривой предельных напряжений», графика в координатах « $\sigma_a$  —  $\sigma_m$ » (рис. 8.6).

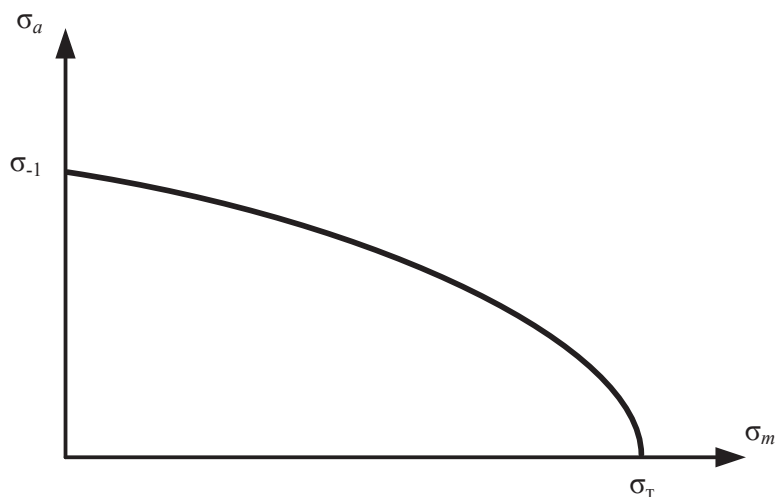


Рис. 8.6

Если амплитудное  $\sigma_a$  и среднее  $\sigma_m$  напряжения цикла соответствуют точке, лежащей под кривой, то усталостного разрушения не произойдет. И соответственно разрушение произойдет, если эта точка будет лежать за пределами кривой.

На практике часто пользуются схематизированной кривой предельных напряжений (рис. 8.7).

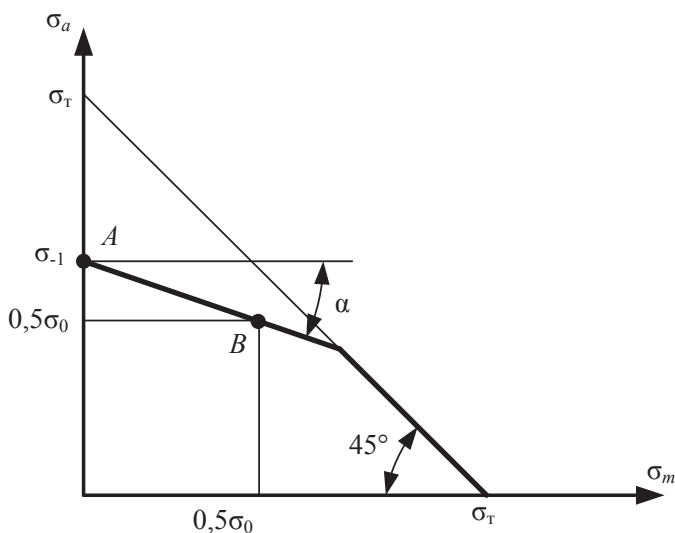


Рис. 8.7

Первый участок представляется прямой, проходящей через точку  $A$  с координатами  $\sigma_a = \sigma_{-1}$  и  $\sigma_m = 0$ , соответствующими симметричному циклу, и точку  $B$  с координатами  $\sigma_a = \sigma_m = 0,5\sigma_0$ , соответствующими отнулевому циклу. Второй участок определяется предельным состоянием, когда амплитудное либо среднее напряжение цикла достигает предела текучести.

График на первом участке аппроксимируется уравнением

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \sigma_m \operatorname{tg} \alpha.$$

Обозначив  $\operatorname{tg} \alpha = \psi_\sigma$ , получим

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m$$

или

$$\sigma_{-1} = \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m,$$

где  $\psi_\sigma$  — коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла.

Влияние на предел выносливости концентрации напряжений, под которой понимаем увеличение напряжений в месте резкого изменения формы и (или) размеров детали, учитывается эффективным коэффициентом концентрации напряжений  $k_\sigma$ :

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k},$$

где  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости образца без концентратора;  $(\sigma_{-1})_k$  — предел выносливости образца с концентратором, выполненного из того же материала и имеющего такие же размеры сечения, как и у образца без концентратора.

С увеличением абсолютных размеров детали предел выносливости уменьшается. Это связано с тем, что с увеличением размера детали возрастает неоднородность металла, ухудшается прокаливаемость при термообработке, возрастает вероятность попадания структурных дефектов в рассматриваемом сечении и т. п. Влияние на предел выносливости размеров детали учитывается масштабным коэффициентом  $\varepsilon_\sigma$ , определяемым по формуле

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_D}{\sigma_{-1}},$$

где  $(\sigma_{-1})_D$  — предел выносливости образца данного диаметра;  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости стандартного образца диаметром  $d = 7 \dots 10$  мм.

На основании результатов экспериментальных исследований установлено, что масштабные коэффициенты могут быть определены по следующим формулам:

- для углеродистых сталей

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{1,68}{d^{0,19}};$$

- для легированных сталей

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{1,63}{d^{0,22}};$$

- для любых сталей

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{1,63}{d^{0,22}}.$$

Дефекты поверхности детали, в частности следы режущего инструмента (резца, фрезы, шлифовального круга и т. п.), являются концентраторами напряжений и снижают предел выносливости детали. Это учитывается при расчетах на усталость коэффициентом состояния поверхности:

$$k_F = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_F},$$

где  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости образца, обработанного с шероховатостью не более  $\sqrt{R_a 0,2}$ ;  $(\sigma_{-1})_F$  — предел выносливости образца с заданной обработкой поверхности.

Повысить предел выносливости можно, создав в поверхностном слое остаточные сжимающие напряжения, препятствующие возникновению усталостных трещин. Поверхностное упрочнение осуществляется термическими (поверхностная закалка), химико-термическими (цементация, азотирование, нитроцементация, цианирование) или механическими (обкатка роликами, дробеструйная обработка) методами.

При расчетах на усталость повышение предела выносливости вследствие поверхностного упрочнения учитывается с помощью коэффициента  $k_{\nu}$ .

Суммарный коэффициент, определяющий отличие предела выносливости конкретной детали, имеющей какой-либо концентратор напряжений, реальные размеры и состояние поверхности, от предела выносливости лабораторного образца, рассчитывается по формуле

$$k_{\sigma D} = \left( \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + k_F - 1 \right) \frac{1}{k_v}.$$

Расчет на усталость выполняется обычно в качестве проверочного и заключается в определении коэффициента запаса прочности, для чего используется схематизированная диаграмма предельных амплитуд (рис. 8.8).

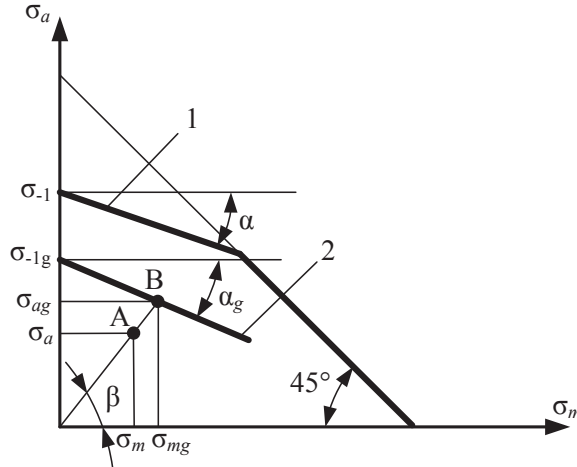


Рис. 8.8

Прямая 1 построена для лабораторного образца. Прямая 2 построена для реальной детали с учетом концентрации напряжений, абсолютных размеров и состояния поверхности. Предел выносливости детали

$$\sigma_{-1g} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}}.$$

Прямая 2 образует с горизонталью угол  $\alpha_g$ , тангенс которого обозначим  $\operatorname{tg} \alpha_g = \psi_{\sigma g}$ .

Тогда

$$\psi_{\sigma g} = \frac{\psi_{\sigma}}{k_{\sigma D}}.$$

При неизменном коэффициенте асимметрии цикла  $r = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  с ростом нагрузки амплитудное и среднее напряжение увеличивается пропорционально вплоть до наступления предельного состояния. Точка A с координатами  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ , соответствующими рабочему циклу действу-

ющих на деталь напряжений, и точка В с координатами  $\sigma_{ag}$  и  $\sigma_{mg}$  лежат на одном луче, образующем с горизонталью угол  $\beta$ , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1-r}{1+r}.$$

Надежность детали оценивают с помощью коэффициента запаса прочности, равного отношению предельного напряжения к фактически действующему:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{ag}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{mg}}{\sigma_m}.$$

Уравнение прямой 2 имеет вид

$$\sigma_{ag} = \sigma_{-1g} - \psi_{\sigma g} \sigma_{mg}.$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma_{ag} = S_{\sigma} \sigma_a;$$

$$\sigma_{-1g} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}};$$

$$\psi_{\sigma g} = \frac{\psi_{\sigma}}{k_{\sigma D}};$$

$$\sigma_{mg} = S_{\sigma} \sigma_m,$$

получим

$$S_{\sigma} \sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D}} - \frac{\psi_{\sigma}}{k_{\sigma D}} S_{\sigma} \sigma_m.$$

Отсюда

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}.$$

Вышеприведенное уравнение справедливо и для циклически изменяющихся касательных напряжений. В этом случае коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau D} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

При совместном действии нормальных и касательных напряжений

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}}.$$

Для заключения о соответствии детали критерию прочностной надежности полученный коэффициент запаса прочности сравнивают с допускаемой величиной:

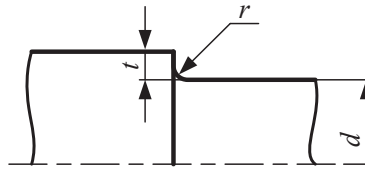
$$S \geq [S].$$

В настоящем учебном пособии рассматриваются решения задач по расчету на усталостную прочность валов механических передач, которые подвергаются воздействию циклически изменяющихся нормальных напряжений от изгиба и растяжения (сжатия) и касательных — от деформации кручения.

Наиболее характерными концентраторами напряжений для валов являются ступенчатое изменение диаметра с галтелью, шпоночный паз, проточки, шлицы или резьба (в т. ч. винтовая нарезка червяка), радиальные отверстия и посадка на вал детали с натягом. Ниже в табл. 8.1...8.8 приведены усредненные значения коэффициентов концентраций напряжений, коэффициентов влияния шероховатости поверхности и коэффициентов влияния упрочнения.

Таблица 8.1

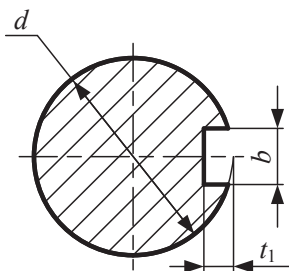
**Коэффициенты  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  для ступенчатого перехода с галтелью**



$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	$k_\sigma$ при $\sigma_b$ , МПа				$k_\tau$ при $\sigma_b$ , МПа			
		500	700	900	1200	500	700	900	1200
2	0,01	1,55	1,60	1,65	1,70	1,40	1,40	1,45	1,45
	0,02	1,80	1,90	2,00	2,15	1,55	1,60	1,65	1,70
	0,03	1,80	1,95	2,05	2,25	1,55	1,60	1,65	1,70
	0,04	1,85	1,90	2,00	2,20	1,60	1,60	1,65	1,75
3	0,01	1,90	2,00	2,10	2,20	1,55	1,60	1,65	1,75
	0,02	1,95	2,10	2,20	2,40	1,60	1,70	1,75	1,85
	0,03	1,95	2,10	2,25	2,45	1,65	1,75	1,75	1,90
5	0,01	2,10	2,25	2,35	2,50	2,20	2,30	2,40	2,60
	0,02	2,15	2,30	2,45	2,65	2,10	2,15	2,25	2,50

Примечание.  $W_{\text{х нетто}} = 0,1d^3$ ;  $W_{\text{р нетто}} = 0,2d^3$ .

Таблица 8.2

Коэффициенты  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  для шпоночного паза

$\sigma_b$ , МПа	$k_\sigma$	$k_\tau$
500	1,80	1,40
700	2,00	1,70
900	2,20	2,05
1200	2,65	2,40

Примечание.  $W_{\text{нечто}} = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d}$ ;  $W_{\text{речто}} = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt_1(d-t_1)^2}{2d}$ .

Таблица 8.3

Размеры шпоночного паза по ГОСТ 23360–78, мм

Диаметр вала	Сечение шпонки		$t_1$
	$b$	$h$	
Свыше 12 до 17	5	5	3,0
Свыше 17 до 22	6	6	3,5
Свыше 22 до 30	8	7	4,0
Свыше 30 до 38	10	8	5,0
Свыше 38 до 44	12	8	5,0
Свыше 44 до 50	14	9	5,5
Свыше 50 до 58	16	10	6,0
Свыше 58 до 65	18	11	7,0
Свыше 65 до 75	20	12	7,5
Свыше 75 до 85	22	14	9,0
Свыше 85 до 95	25	14	9,0
Свыше 95 до 110	28	16	10,0
Свыше 110 до 130	32	18	11,0
Свыше 130 до 150	36	20	12,0
Свыше 150 до 170	40	22	13,0
Свыше 170 до 200	45	25	15,0



Таблица 8.4

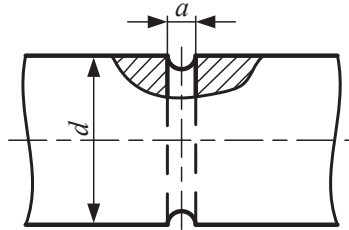
**Коэффициенты  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  для шлицевых и резьбовых участков вала**

$\sigma_b$ , МПа	$k_\sigma$		$k_\tau$ шлицев		$k_\tau$ резьбы
	шлицев	резьбы	прямобоочных	эвольвентных	
500	1,45	1,80	2,25	1,43	1,35
700	1,60	2,20	2,50	1,49	1,70
900	1,70	2,45	2,65	1,55	2,10
1200	1,75	2,90	2,80	1,60	2,35

Примечание.  $W_{\chi_{\text{нетто}}} = \frac{\pi d^3}{32}$ ;  $W_{\rho_{\text{нетто}}} = \frac{\pi d^3}{16}$ , где  $d$  — диаметр внутренней поверхности шлицев, внутренний диаметр резьбы, диаметр окружности впадин для червяка.

Таблица 8.5

**Коэффициенты  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  для валов с радиальными отверстиями**



$\frac{a}{d}$	$\sigma_b$ стали, МПа		
	$\leq 700$	800	900
Для $k_\sigma$			
Свыше 0,05 до 0,15	2,00	2,02	2,12
Свыше 0,15 до 0,25	1,80	1,82	1,90
Для $k_\tau$			
Свыше 0,05 до 0,15	1,75	1,83	1,90
Свыше 0,15 до 0,25			

Примечание.  $W_{\chi_{\text{нетто}}} = \frac{\pi d^3}{32} \left( 1 - 1,54 \frac{a}{d} \right)$ ;  $W_{\rho_{\text{нетто}}} = \frac{\pi d^3}{16} \left( 1 - \frac{a}{d} \right)$ .

Таблица 8.6

**Отношение  $k_\sigma/\epsilon_\sigma$  для посадок с натягом**

Диаметр вала, мм	$\sigma_b$ , МПа			
	500	700	900	1200
30	2,60	3,30	4,00	5,10
40	2,75	3,50	4,30	5,40
50	2,90	3,70	4,50	5,70

Окончание табл. 8.6

Диаметр вала, мм	$\sigma_b$ , МПа			
	500	700	900	1200
60	3,00	3,85	4,70	5,95
70	3,10	4,00	4,85	6,15
80	3,20	4,10	4,95	6,30
90	3,30	4,20	5,10	6,45
100	3,35	4,30	5,20	6,60

Примечание.  $\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} = 0,6 \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + 0,4$ .

Таблица 8.7

Коэффициент влияния шероховатости поверхности  $k_F$ 

Способ обработки поверхности	Параметр шероховатости $R_a$ , мкм	$k_F$ при $\sigma_b$ , МПа	
		$\leq 700$	$> 700$
Шлифование тонкое	До 0,20	1,00	1,00
Обтачивание тонкое	0,20...0,80	1,08	1,11
Шлифование чистовое	0,80...1,60	1,15	1,20
Обтачивание чистовое	1,60...3,20	1,25	1,33
Обдирка	3,20...20,00	1,30	1,50

Таблица 8.8

Коэффициент влияния упрочнения  $k_V$ 

Вид упрочняющей обработки	$k_\sigma < 1,1$	$k_\sigma = 1,1...1,5$	$k_\sigma \leq 1,8$
Закалка ТВЧ	1,30...1,60	1,60...1,70	2,40...2,80
Азотирование	1,15...1,25	1,30...1,90	2,00...3,00
Накатка роликом	1,20...1,40	1,50...1,70	1,80...2,20
Дробеструйный наклеп	1,10...1,30	1,40...1,50	1,60...2,50

При пользовании табличными данными следует применять метод линейной интерполяции, сущность которого заключается в том, что между дискретными точками, указанными в таблицах, функциональная зависимость между параметрами имеет линейный характер. Более подробно смотри задачу № 10.

В качестве примечаний к таблицам приведены зависимости для определения моментов сопротивления «нетто», т. е. с учетом особенностей геометрии, используя которые следует определить напряжения изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{и}} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{X \text{ нетто}}}; \quad \tau = \frac{M_{\text{к}}}{W_{\rho \text{ нетто}}}.$$

**Задача № 10**

Определить запас усталостной прочности  $S$  в сечениях В-В, Д-Д и Е-Е представленного на эскизе вала-шестерни (рис. 8.9).

Заданы: материал вала и его предел прочности  $\sigma_B$ , геометрические размеры сечения. Значения изгибающих моментов  $M_{иx}$ ,  $M_{иy}$ , крутящего момента  $M_k$  и нормальной силы  $N$  определить непосредственным измерением эпюр. Масштабы построения эпюр  $K_{Mi}$ ,  $K_{Mk}$  и  $K_N$  заданы.

Дано:

$$K_{Mi} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м/мм},$$

$$K_{Mk} = 6 \text{ Н} \cdot \text{м/мм},$$

$$K_N = 300 \text{ Н/мм},$$

$$d_f = 51 \text{ мм},$$

$$d = 30 \text{ мм},$$

$$d_1 = 35 \text{ мм},$$

$$d_2 = 40 \text{ мм},$$

$$\sigma_B = 780 \text{ МПа},$$

$$r = 0,5 \text{ мм},$$

материал вала — 30ХГСА.

Определить  $S$ .

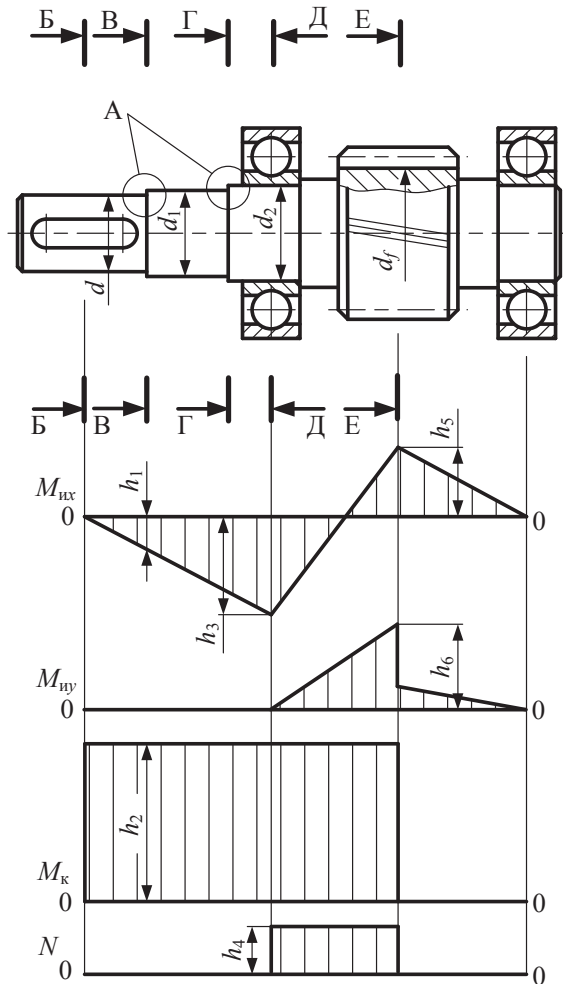
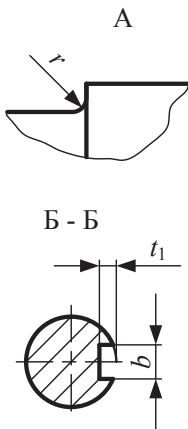


Рис. 8.9

Пределы выносливости  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  определить из соотношений:

- для углеродистых сталей  $\sigma_{-1} = 0,43 \sigma_B$ ;
- для легированных сталей  $\sigma_{-1} = 0,35 \sigma_B + 100$ ;
- $\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1}$ .

При решении задачи полагать, что крутящий момент изменяется по симметричному циклу.

При расчете вала на прочность при воздействии переменных напряжений определяется запас прочности в сечениях потенциально опасных с точки зрения усталостного разрушения (наличие концентраторов, действие наибольших напряжений и т. п.). Вывод о соответствии вала критерию усталостной прочности делается на основании сравнения наименьшего коэффициента запаса прочности, соответствующего наиболее опасному сечению, с допускаемой величиной.

Коэффициент запаса прочности

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}},$$

где  $S_\sigma$ ,  $S_\tau$  — коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям соответственно.

Здесь

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma D} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m};$$

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau D} \tau_a + \psi_\tau \tau_m},$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  — пределы выносливости при симметричном цикле изменения нормальных и касательных напряжений;  $k_{\sigma D}$  и  $k_{\tau D}$  — коэффициенты перехода от предела выносливости лабораторного образца к пределу выносливости детали:

$$k_{\sigma D} = \left( \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + k_F - 1 \right) \frac{1}{k_V}$$

и

$$k_{\tau D} = \left( \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} + k_F - 1 \right) \frac{1}{k_V},$$

(здесь  $k_\sigma$  и  $k_\tau$  — эффективные коэффициенты концентрации напряжений;  $\varepsilon_\sigma$  и  $\varepsilon_\tau$  — масштабные коэффициенты;  $k_F$  — коэффициент, учи-

тывающий шероховатость поверхности;  $k_v$  — коэффициент, учитывающий упрочнение);  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  — амплитудные значения напряжений за цикл;  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  — коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла;  $\sigma_m$  и  $\tau_m$  — средние значения напряжений за цикл.

Пределы выносливости материала вала:

$$\sigma_{-1} = 0,35 \sigma_b + 100 = 0,35 \cdot 780 + 100 = 373 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 0,58 \sigma_{-1} = 0,58 \cdot 373 = 216 \text{ МПа}.$$

### Сечение В-В

Нагрузки, действующие в сечении В-В, определим из эпюр умножением соответствующих ординат на масштабные коэффициенты:

$$M_{ix} = K_{Mi} h_1 = 15 \cdot 5 = 75 \text{ Н·м};$$

$$M_{iy} = 0;$$

$$M_k = K_{Mk} h_2 = 6 \cdot 23 = 138 \text{ Н·м};$$

$$N = 0.$$

Суммарный изгибающий момент

$$M_{i\Sigma} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2} = \sqrt{75^2 + 0^2} = 75 \text{ Н·м}.$$

Нормальные напряжения от действия изгибающего момента  $\sigma_i$  при вращении вала вокруг своей оси создают переменную составляющую цикла, а нормальные напряжения от действия продольной силы  $\sigma_0$  — постоянную, т. е. нормальные напряжения изменяются от  $\sigma_{\max} = \sigma_i - \sigma_0$  до  $\sigma_{\min} = -\sigma_i - \sigma_0$ .

Изгибающий момент

$$\sigma_i = \frac{M_{i\Sigma}}{W_{\text{нетто}}},$$

где  $W_{\text{нетто}}$  — осевой момент сопротивления сечения изгибу «нетто».

Для сечения В-В

$$W_{\text{нетто}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 30^3}{32} = 2649,4 \text{ мм}^3.$$

$$\sigma_i = \frac{75 \cdot 10^3}{2649,4} = 28,3 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_{\text{нетто}}},$$

где  $A_{\text{нетто}}$  — площадь сечения «нетто»,

$$A_{\text{нетто}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 706,5 \text{ мм}^2.$$

$$\sigma_0 = \frac{0}{706,5} = 0.$$

$$\sigma_{\max} = 28,3 - 0 = 28,3 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\min} = -28,3 - 0 = -28,3 \text{ МПа}.$$

График изменения нормальных напряжений показан на рис. 8.10.

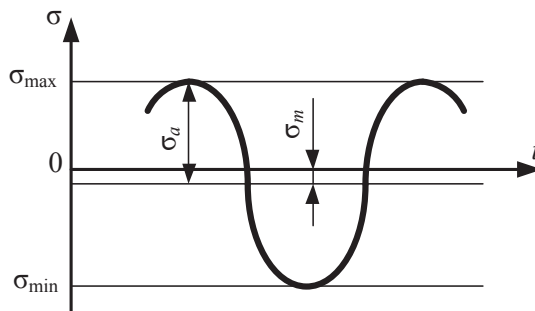


Рис. 8.10

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{28,3 - (-28,3)}{2} = 28,3 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{28,3 + (-28,3)}{2} = 0.$$

Концентратором напряжений в рассматриваемом сечении является ступенчатое изменение диаметра вала с галтелью. Эффективный коэффициент концентрации напряжений принимаем по табл. 8.1, используя при этом метод линейной интерполяции.

Рассчитаем отношения  $\frac{t}{r}$  и  $\frac{r}{d}$ :

$$\frac{t}{r} = \frac{d_1 - d}{2r} = \frac{35 - 30}{2 \cdot 0,5} = 5;$$

$$\frac{r}{d} = \frac{0,5}{30} = 0,017.$$

Приведем табличные значения: при  $\sigma_B = 700$  МПа  $k_\sigma = 2,30$ ; при  $\sigma_B = 900$  МПа  $k_\sigma = 2,45$ .

Изобразим фрагмент графика зависимости  $k_\sigma$  от  $\sigma_B$ , полагая, что на рассматриваемом интервале эта зависимость линейна (рис. 8.11).

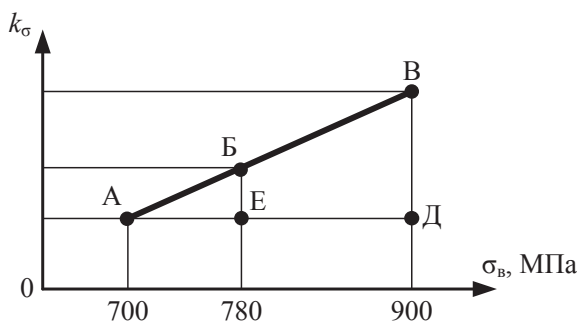


Рис. 8.11

Предел прочности материала вала-червяка  $\sigma_B = 780$  МПа. Соответствующий коэффициент концентрации напряжений  $k_\sigma$  определим, используя подобие треугольников  $\triangle ABE \sim \triangle ABD$ .

$$k_\sigma = 2,30 + BE.$$

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AE}{AD},$$

откуда получим

$$BE = \frac{AE \cdot BD}{AD} = \frac{80 \cdot 0,15}{200} = 0,06.$$

Следовательно,

$$k_\sigma = 2,30 + 0,06 = 2,36.$$

Масштабные коэффициенты  $\varepsilon_\sigma$  и  $\varepsilon_\tau$  равны между собой, так как материал — легированная сталь.

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = \frac{1,63}{d^{0,22}} = \frac{1,63}{30^{0,22}} = 0,77.$$

Коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности, определим по табл. 8.7, полагая, что поверхность вала в рассматриваемом сечении обработана по  $R_a = 3,2$ . Получим  $k_F = 1,33$ .

Коэффициент, учитывающий упрочнение,  $k_V = 1$ , так как упрочнение отсутствует.

Тогда

$$k_{\sigma D} = \left( \frac{2,36}{0,77} + 1,33 - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 3,39.$$

Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла:

$$\psi_{\sigma} = 0,02 \cdot (1 + 0,01\sigma_b) = 0,02 \cdot (1 + 0,01 \cdot 780) = 0,176.$$

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям:

$$S_{\sigma} = \frac{373}{3,39 \cdot 28,3 + 0,176 \cdot 0} = 3,89.$$

Касательные напряжения от действия крутящего момента

$$\tau = \frac{M_k}{W_{\rho \text{ нетто}}}.$$

Полярный момент сопротивления сечения «нетто»:

$$W_{\rho \text{ нетто}} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 30^3}{16} = 5\,298,8 \text{ мм}^3.$$

$$\tau = \frac{138 \cdot 10^3}{5\,298,8} = 26,0 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения  $\tau$  изменяются по симметричному циклу (рис. 8.12).

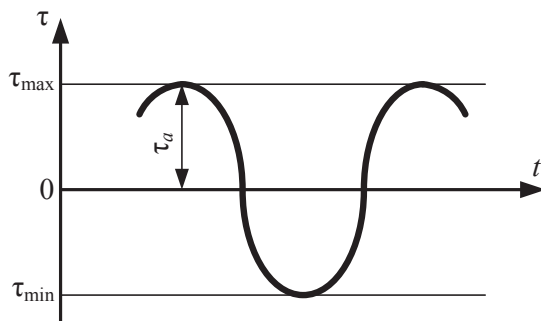


Рис. 8.12

Амплитудное значение  $\tau_a = 26,0$  МПа. Среднее напряжение  $\tau_m = 0$ . Эффективный коэффициент концентрации напряжений  $k_{\tau} = 2,19$  (табл. 8.1, с использованием линейной интерполяции). Коэффициент, учитывающий упрочнение,  $k_{\nu} = 1$ . Масштабный коэффициент  $\varepsilon_{\tau} = 0,77$ .



Отсюда

$$k_{\tau D} = \left( \frac{2,19}{0,77} + 1,33 - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 3,17.$$

Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла:

$$\psi_{\tau} = 0,5\psi_{\sigma} = 0,5 \cdot 0,176 = 0,088.$$

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям:

$$S_{\tau} = \frac{216}{3,17 \cdot 26,0 + 0,088 \cdot 0} = 2,62.$$

Общий коэффициент запаса прочности в сечении В-В:

$$S_B = \frac{3,89 \cdot 2,62}{\sqrt{3,89^2 + 2,62^2}} = 2,17 > [S] = 2.$$

Сечение В-В проходит по запасу прочности.

*Сечение Д-Д*

Нагрузки, действующие в сечении Д-Д определим аналогично сечению В-В:

$$M_{иx} = K_{Ми} h_3 = 15 \cdot 14 = 210 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{иy} = 0;$$

$$M_k = K_{Мк} h_2 = 6 \cdot 23 = 138 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$N = K_N h_4 = 300 \cdot 7 = 2100 \text{ Н}.$$

Суммарный изгибающий момент  $M_{и\Sigma} = 210 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Поскольку нормальная сила в этом сечении равна 2100 Н, то нормальные напряжения изменяются от  $\sigma_{\max} = \sigma_{и} - \sigma_0$  до  $\sigma_{\min} = -\sigma_{и} - \sigma_0$ .

Изгибающий момент:

$$\sigma_{и} = \frac{M_{и\Sigma}}{W_{\text{нетто}}}.$$

Для сечения Д-Д:

$$W_{\text{нетто}} = \frac{\pi d_2^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 40^3}{32} = 6280 \text{ мм}^3.$$

$$\sigma_{и} = \frac{210 \cdot 10^3}{6280} = 33,4 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_{\text{нетто}}}.$$

$$A_{\text{нетто}} = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 40^2}{4} = 1256 \text{ мм}^2.$$

$$\sigma_0 = \frac{2100}{1256} = 1,7 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\max} = 33,4 - 1,7 = 31,7 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\min} = -33,4 - 1,7 = -35,1 \text{ МПа}.$$

График изменения нормальных напряжений показан на рис. 8.13.

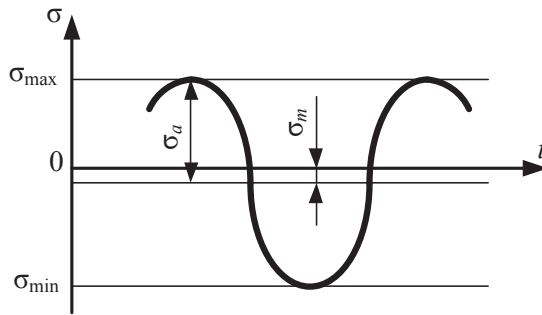


Рис. 8.13

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{31,7 - (-35,1)}{2} = 33,4 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{31,7 + (-35,1)}{2} = -1,7 \text{ МПа}.$$

Концентрацию напряжений в сечении Д-Д создает посадка на вал с натягом внутреннего кольца подшипника.

По табл. 8.6 с использованием линейной интерполяции определяем

$$\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = 3,82.$$

Коэффициент  $k_F$  определим по табл. 8.7, полагая, что шероховатость поверхности вала в рассматриваемом сечении лежит в пределах  $R_a = 0,8 \dots 1,6$ . Получим  $k_F = 1,2$ .

Коэффициент, учитывающий упрочнение,  $k_V = 1$ , так как упрочнение отсутствует.

Тогда

$$k_{\sigma D} = (3,82 + 1,2 - 1) \cdot \frac{1}{1} = 4,02.$$

$$S_{\sigma} = \frac{373}{4,02 \cdot 33,4 + 0,176 \cdot 1,7} = 2,77.$$

Касательные напряжения от действия крутящего момента

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho \text{ нетто}}}.$$

$$W_{\rho \text{ нетто}} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 40^3}{16} = 12\,560 \text{ мм}^3.$$

$$\tau = \frac{138 \cdot 10^3}{12\,560} = 11,0 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения  $\tau$  изменяются по симметричному циклу от  $\tau_{\max} = 11,0 \text{ МПа}$  до  $\tau_{\min} = -11,0 \text{ МПа}$ .

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{11,0 - (-11,0)}{2} = 11,0 \text{ МПа}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{11,0 + (-11,0)}{2} = 0.$$

$$\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} = 0,6 \cdot \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + 0,4 = 0,6 \cdot 3,82 + 0,4 = 2,69.$$

Отсюда

$$k_{\tau D} = (2,69 + 1,2 - 1) \cdot \frac{1}{1} = 2,89.$$

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям:

$$S_{\tau} = \frac{216}{2,89 \cdot 11,0 + 0,088 \cdot 0} = 6,79.$$

Общий коэффициент запаса прочности в сечении Д-Д:

$$S_D = \frac{2,77 \cdot 6,79}{\sqrt{2,77^2 + 6,79^2}} = 2,56.$$

Сечение Д-Д проходит по запасу прочности.

*Сечение Е-Е*

Нагрузки, действующие в сечении Е-Е:

$$M_{\text{иx}} = K_{\text{Ми}} h_5 = 15 \cdot 10 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{iy} = K_{Mi} h_6 = 15 \cdot 13 = 195 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_k = K_{Mk} h_2 = 6 \cdot 23 = 138 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$N = K_N h_4 = 300 \cdot 7 = 2100 \text{ Н}.$$

Суммарный изгибающий момент:

$$M_{i\Sigma} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2} = \sqrt{150^2 + 195^2} = 246 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Нормальные напряжения изменяются по циклу от  $\sigma_{\max} = \sigma_i - \sigma_0$  до  $\sigma_{\min} = -\sigma_i - \sigma_0$ .

Изгибающий момент рассчитываем по формуле

$$\sigma_i = \frac{M_{i\Sigma}}{W_{\text{нетто}}}.$$

Для сечения Е-Е:

$$W_{\text{нетто}} = \frac{\pi d_f^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 51^3}{32} = 13\,016,4 \text{ мм}^3.$$

$$\sigma_i = \frac{246 \cdot 10^3}{13\,016,4} = 18,9 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_{\text{нетто}}}.$$

$$A_{\text{нетто}} = \frac{\pi d_f^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 51^2}{4} = 2\,041,8 \text{ мм}^2.$$

$$\sigma_0 = \frac{2\,100}{2\,041,8} = 1,0 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\max} = 18,9 - 1,0 = 17,9 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{\min} = -18,9 - 1,0 = -19,9 \text{ МПа}.$$

График изменения нормальных напряжений показан на рис. 8.13.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{17,9 - (-19,9)}{2} = 18,9 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{17,9 + (-19,9)}{2} = -1,0 \text{ МПа}.$$

Концентратором напряжений в рассматриваемом сечении является нарезка эвольвентных зубьев шестерни. Эффективный коэффициент концентрации напряжений принимаем по табл. 8.4, с использованием линейной интерполяции  $k_\sigma = 1,64$  и  $k_\tau = 1,51$ .

Масштабные коэффициенты:

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = \frac{1,63}{d_f^{0,22}} = \frac{1,63}{51^{0,22}} = 0,69.$$

Коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности, определим по табл. 8.7 из условия, что  $R_a = 3,2$ . Получим  $k_F = 1,33$ .

Коэффициент, учитывающий упрочнение,  $k_V = 1$ , так как упрочнение отсутствует.

Тогда

$$k_{\sigma D} = \left( \frac{1,64}{0,69} + 1,33 - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 2,71.$$

Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла:

$$\psi_\sigma = 0,02 \cdot (1 + 0,01\sigma_b) = 0,02 \cdot (1 + 0,01 \cdot 780) = 0,176.$$

Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям:

$$S_\sigma = \frac{373}{2,71 \cdot 18,9 + 0,176 \cdot 1,0} = 7,26.$$

Касательные напряжения  $\tau$  от действия крутящего момента, изменяющиеся по симметричному циклу:

$$\tau = \frac{M_k}{W_{\rho \text{ нетто}}}.$$

$$W_{\rho \text{ нетто}} = \frac{\pi d_f^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 51^3}{16} = 26\,032,8 \text{ мм}^3.$$

$$\tau = \frac{138 \cdot 10^3}{26\,032,8} = 5,3 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = 5,3 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\min} = -5,3 \text{ МПа}.$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} = \frac{5,3 - (-5,3)}{2} = 5,3 \text{ МПа}.$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} = \frac{5,3 + (-5,3)}{2} = 0.$$

Тогда

$$k_{\tau D} = \left( \frac{1,51}{0,69} + 1,33 - 1 \right) \cdot \frac{1}{1} = 2,52.$$

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям:

$$S_{\tau} = \frac{216}{2,52 \cdot 5,3 + 0,088 \cdot 0} = 16,17.$$

Общий коэффициент запаса прочности в сечении Е-Е:

$$S_E = \frac{7,26 \cdot 16,17}{\sqrt{7,26^2 + 16,17^2}} = 6,62.$$

*Вывод.* Вал соответствует критерию усталостной прочности в рассматриваемых сечениях.

### Задание для самопроверки

Для задачи, рассмотренной в подглаве 8.2, определить коэффициент запаса прочности в сечениях Б-Б и Г-Г.

*Ответ*

В сечении Б-Б

$$S_B = S_{\tau} = 2,85.$$

В сечении Г-Г

$$S_G = 2,26.$$

## Задания

### 4. Плоский поперечный изгиб

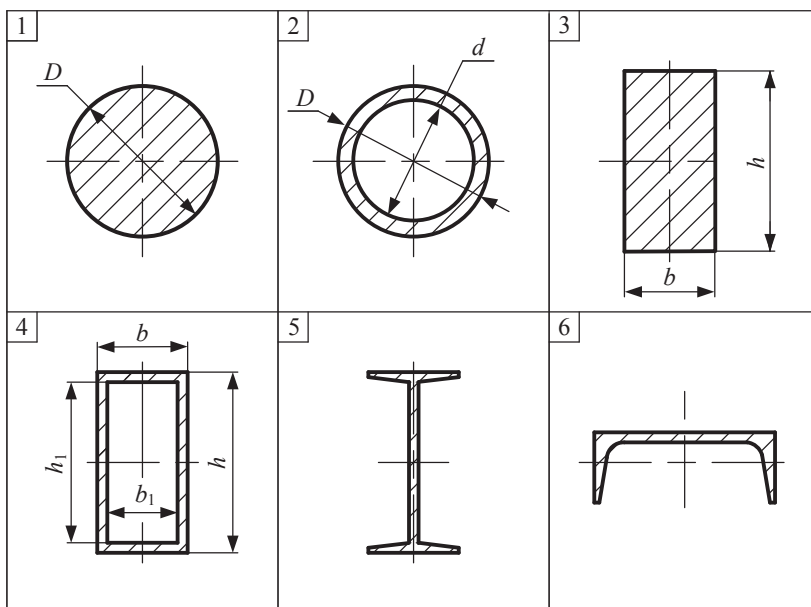
Для каждой балки определить опорные реакции, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов.

Балка нагружена сосредоточенной силой  $F$ , кН; моментом  $M$ , кН·м; распределенной нагрузкой  $q$ , кН/м. Длина пролета балки  $l$ , м. Допускаемое напряжение материала балок  $[\sigma]$ , МПа, известно.

Определить из расчета на прочность по нормальным напряжениям размеры (или номер прокатного профиля) поперечного сечения балки (задания 4.1–4.28).

Проверить прочность балки (задания 4.29–4.60) при заданных размерах поперечного сечения балки.

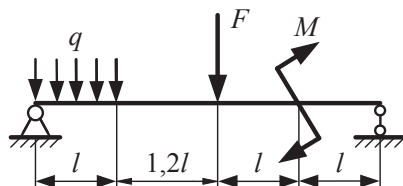
Профили поперечного сечения балок указаны в задании и изображены ниже.



1 — круг диаметром  $D$ , мм; 2 — кольцо с отношением внутреннего диаметра  $d$ , мм, к внешнему диаметру  $D$ , мм;  $d/D = 0,8$ ; 3 — прямоугольник, основание которого  $b$ , мм, и высота  $h$ , мм,  $b = 0,5h$ ; 4 — прямоугольник, основание которого  $b$ , мм, и высота  $h$ , мм, с прямоугольным вырезом,  $b_1 = 0,8b$  и  $h_1 = 0,8h$ ;  $b_1 = 0,5h_1$ ;  $b = 0,5h$ ; 5 — двутавр; 6 — швеллер

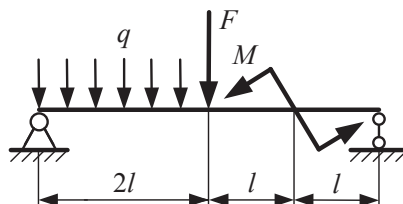
### Задание 4.1

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	10	100	0,8	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	10	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



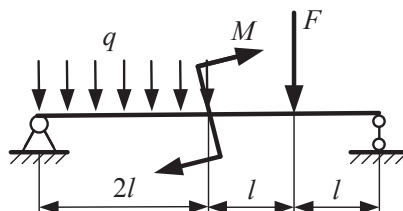
### Задание 4.2

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	20	16	100	0,8	1
2	25	20	10	120	1	5
3	20	15	40	160	0,8	6
4	30	10	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



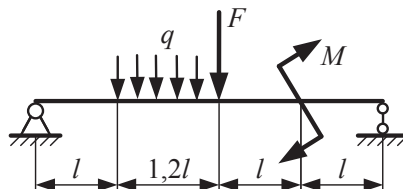
### Задание 4.3

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	16	100	1	1
2	20	10	20	120	1	4
3	30	10	20	80	0,8	6
4	20	12	16	100	0,8	2
5	20	20	18	110	0,6	3



### Задание 4.4

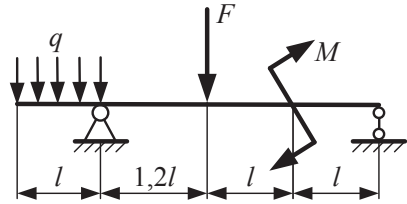
Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	10	20	90	0,8	2
2	20	30	40	100	0,8	4
3	16	60	16	100	0,4	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	30	120	0,4	1





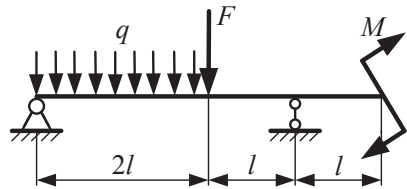
Задание 4.5

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	40	10	100	0,8	1
2	50	10	20	120	0,6	3
3	25	60	20	100	0,9	5
4	20	10	20	90	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



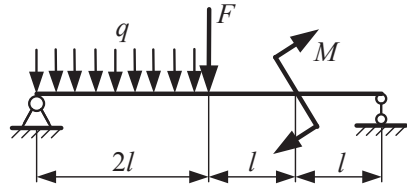
Задание 4.6

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	20	26	100	0,8	1
2	25	20	10	110	1	5
3	20	25	40	120	0,8	6
4	40	10	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



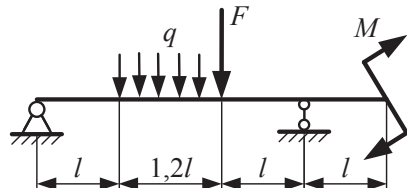
Задание 4.7

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	18	100	1	1
2	20	10	20	120	1	4
3	30	10	20	80	0,8	6
4	20	12	16	100	0,8	2
5	50	10	18	110	1	3



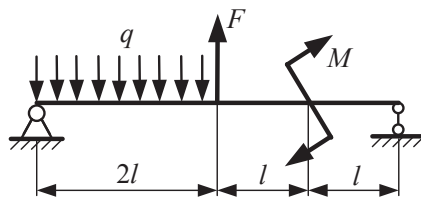
Задание 4.8

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	20	90	1	2
2	20	30	20	100	0,8	4
3	20	40	16	100	1	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	20	120	0,4	1



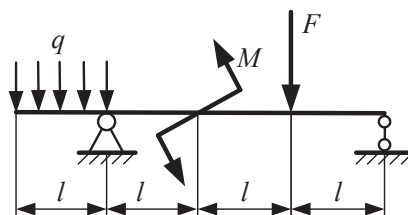
Задание 4.9

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	20	40	100	1	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	4	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	25	10	10	100	1	2



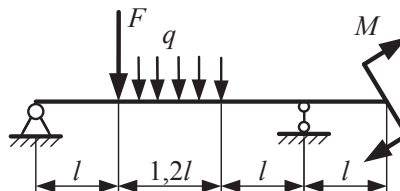
Задание 4.10

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	40	20	16	100	0,8	1
2	25	20	20	120	1	5
3	20	25	40	140	0,8	6
4	30	10	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



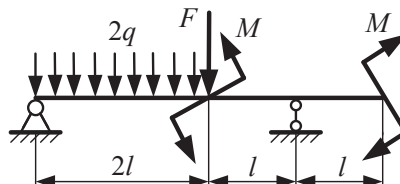
Задание 4.11

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	10	30	16	100	1	1
2	20	40	20	120	1	4
3	20	10	20	80	0,8	6
4	20	20	26	100	0,8	2
5	20	20	20	110	0,6	3



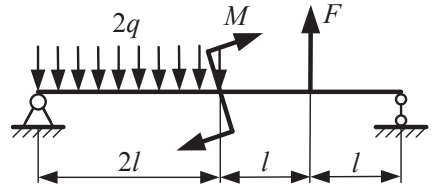
Задание 4.12

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	40	60	20	90	0,8	2
2	20	30	40	100	0,8	4
3	16	20	16	100	0,4	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	30	120	0,4	1



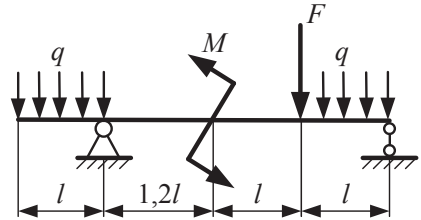
Задание 4.13

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	20	100	0,8	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	30	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



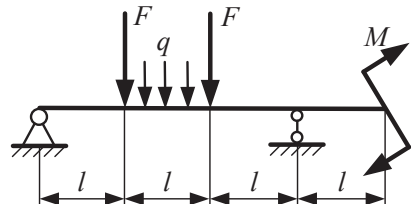
Задание 4.14

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	40	30	16	100	0,8	1
2	25	20	10	120	1	5
3	20	15	20	160	0,8	6
4	30	30	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



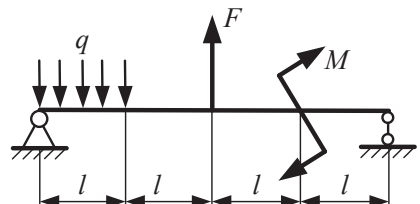
Задание 4.15

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	16	100	1	1
2	20	10	20	120	1	4
3	20	10	30	80	0,8	6
4	20	12	16	100	0,8	2
5	20	20	18	110	0,6	3



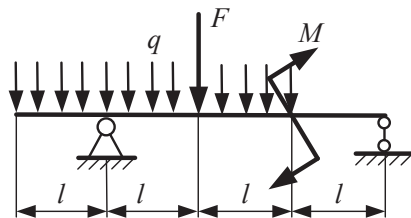
Задание 4.16

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	20	20	90	0,8	2
2	20	30	40	100	0,8	4
3	16	30	16	100	0,4	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	20	30	120	0,4	1



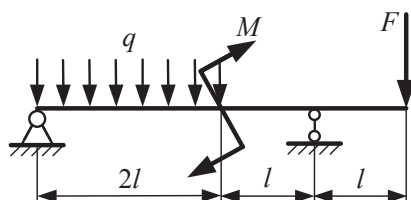
Задание 4.17

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	10	100	0,8	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	10	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



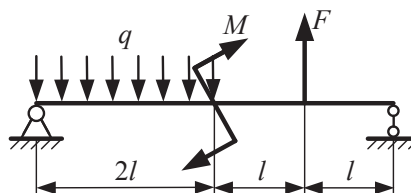
Задание 4.18

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	10	26	100	0,8	1
2	25	20	10	120	1	5
3	10	25	40	160	0,8	6
4	30	10	20	110	0,6	2
5	20	12	20	120	0,4	4



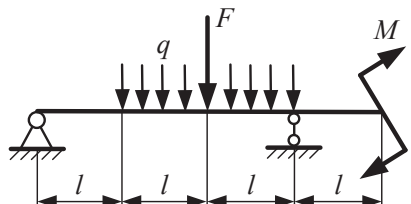
Задание 4.19

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	26	100	1	1
2	20	10	30	120	1	4
3	30	20	20	80	0,8	6
4	20	12	16	100	0,8	2
5	20	20	28	110	0,6	3



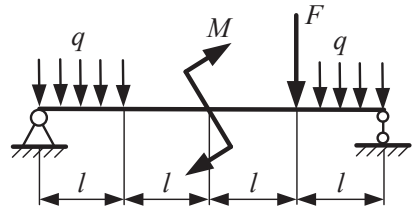
Задание 4.20

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	20	90	0,8	2
2	20	20	40	100	0,8	4
3	24	60	16	100	0,4	5
4	25	15	30	80	0,4	6
5	25	40	30	120	0,4	1



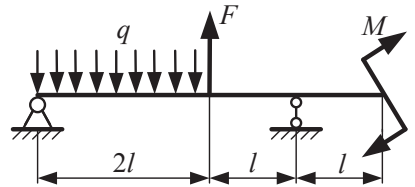
Задание 4.21

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	10	100	0,8	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	10	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



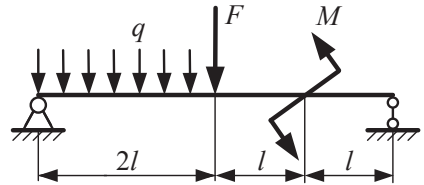
Задание 4.22

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	20	16	100	0,8	1
2	25	20	10	120	1	5
3	20	15	40	160	0,8	6
4	30	10	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



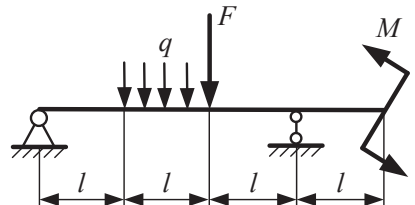
Задание 4.23

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	16	100	1	1
2	20	10	20	120	1	4
3	30	10	20	80	0,8	6
4	20	12	16	100	0,8	2
5	20	20	18	110	0,6	3



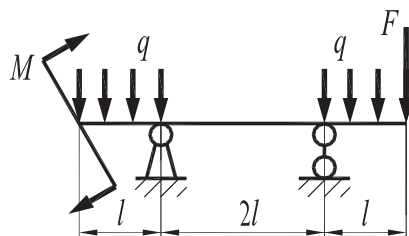
Задание 4.24

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	10	20	90	0,8	2
2	20	30	40	100	0,8	4
3	16	60	16	100	0,4	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	30	120	0,4	1



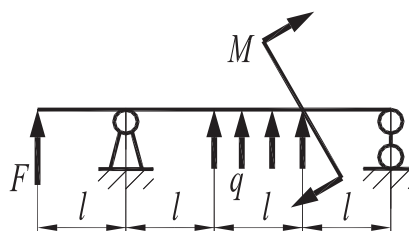
Задание 4.25

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	20	90	1	2
2	20	30	20	100	0,8	4
3	20	40	16	100	1	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	20	120	0,4	1



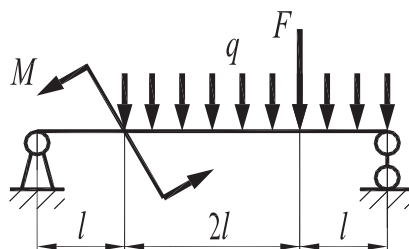
Задание 4.26

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	10	100	0,8	1
2	50	30	20	120	0,6	3
3	25	60	10	100	0,9	5
4	20	20	20	80	0,8	4
5	15	10	10	100	1	2



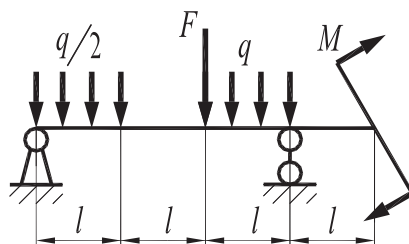
Задание 4.27

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	10	20	90	0,8	2
2	20	30	40	100	0,8	4
3	16	60	16	100	0,4	5
4	25	25	12	80	0,4	6
5	15	40	30	120	0,4	1



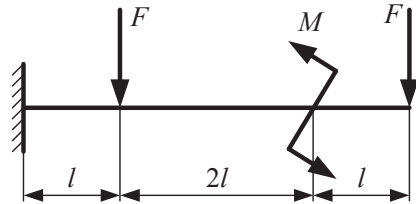
Задание 4.28

Вариант	$F$	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	20	26	100	0,8	1
2	25	20	10	110	1	5
3	20	25	40	120	0,8	6
4	40	10	20	110	0,6	2
5	10	12	10	120	0,4	4



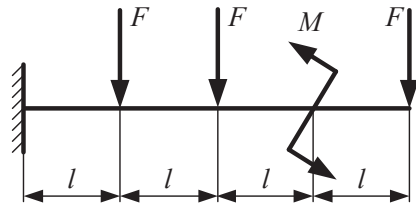
Задание 4.29

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	150	0,8	1
2	50	30	120	200	0,6	2
3	25	60	100	160	0,9	1
4	20	20	80	200	0,8	2
5	15	10	100	200	1	2



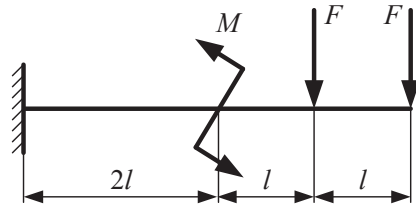
Задание 4.30

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$b$	$l$	Вид сечения
1	20	20	100	160	0,8	3
2	25	20	120	300	1	4
3	20	15	160	250	0,8	3
4	30	10	110	250	0,6	3
5	10	12	120	100	0,4	4



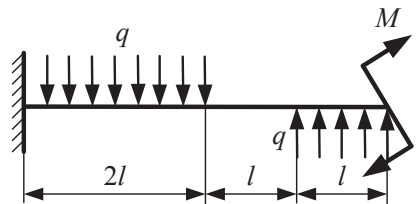
Задание 4.31

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	30	10	100	250	1	3
2	20	10	120	500	1	4
3	30	10	80	200	0,8	4
4	20	12	100	160	0,8	3
5	20	20	110	300	0,6	3



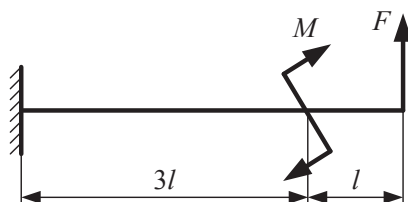
Задание 4.32

Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	20	90	150	0,8	2
2	40	40	100	180	0,8	1
3	20	16	100	200	0,4	2
4	25	24	80	200	0,4	2
5	20	30	120	400	0,4	1



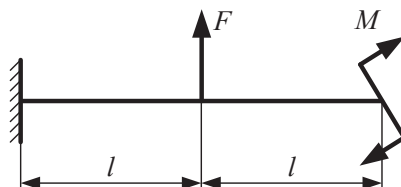
Задание 4.33

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	300	0,8	3
2	50	30	120	300	0,6	3
3	25	60	100	250	0,9	4
4	20	20	80	200	0,8	4
5	15	10	100	400	1	3



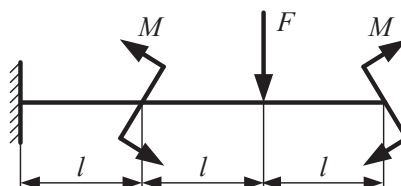
Задание 4.34

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$b$	$l$	Вид сечения
1	20	20	100	160	0,8	3
2	25	20	120	100	1	3
3	20	15	160	200	0,8	4
4	30	10	110	200	0,6	3
5	10	12	120	100	0,4	4



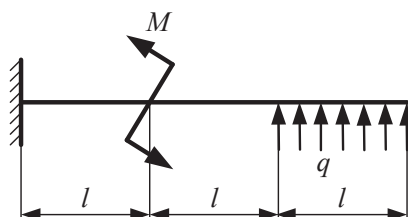
Задание 4.35

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$b$	$l$	Вид сечения
1	30	10	100	160	1	3
2	20	10	120	100	1	4
3	30	10	80	100	0,8	3
4	20	12	100	160	0,8	3
5	20	20	110	180	0,6	4



Задание 4.36

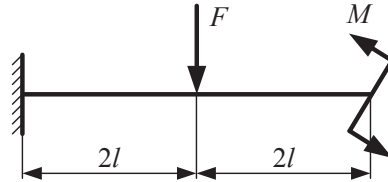
Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$b$	$l$	Вид сечения
1	10	20	90	160	0,8	3
2	30	40	100	100	0,8	4
3	60	16	100	200	0,4	3
4	25	12	80	200	0,4	3
5	40	30	120	100	0,4	4





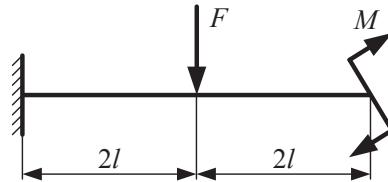
Задание 4.37

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	0,8	5, № 14
2	50	30	120	0,6	5, № 12
3	25	60	100	0,4	5, № 16
4	20	20	80	0,8	5, № 14
5	15	10	100	1	5, № 16



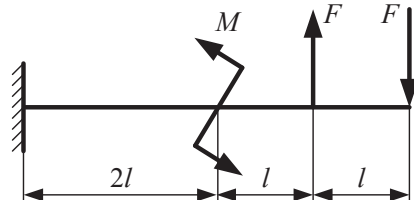
Задание 4.38

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	20	100	160	0,4	2
2	25	20	120	100	1	2
3	20	15	160	400	0,8	2
4	30	10	110	200	0,6	2
5	10	12	120	100	0,4	1



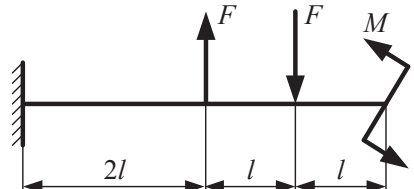
Задание 4.39

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	30	10	100	160	1	3
2	20	10	120	200	1	4
3	30	10	80	200	0,8	3
4	20	12	100	160	0,8	3
5	20	20	110	180	0,6	3



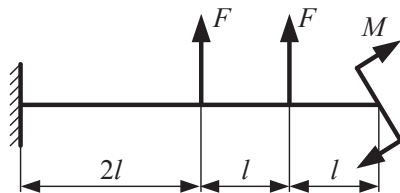
Задание 4.40

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	20	90	100	0,8	2
2	20	40	100	300	0,8	1
3	16	16	100	200	0,4	1
4	25	12	80	250	0,4	2
5	15	30	120	240	0,4	1



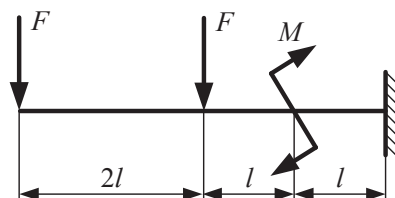
Задание 4.41

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	100	0,8	3
2	50	30	120	200	0,6	3
3	25	60	100	100	0,9	3
4	20	20	80	200	0,8	4
5	15	10	100	200	1	3



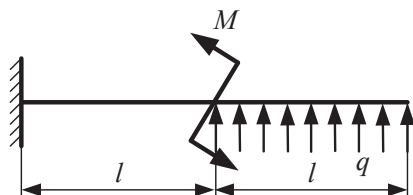
Задание 4.42

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	20	100	160	0,8	1
2	25	20	120	210	1	2
3	20	15	160	240	0,8	2
4	30	10	110	220	0,6	2
5	10	12	120	210	0,4	1



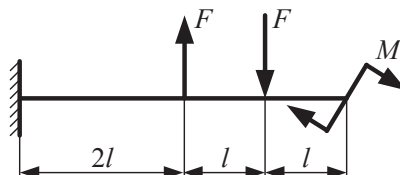
Задание 4.43

Вариант	$M$	$q$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	16	100	300	1	1
2	30	20	120	200	1	2
3	30	20	80	300	0,8	2
4	32	16	100	200	0,8	2
5	20	18	110	200	0,6	2



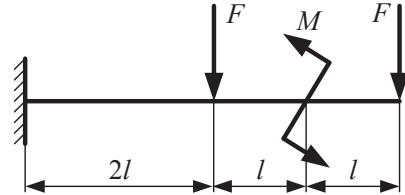
Задание 4.44

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$d$	$l$	Вид сечения
1	20	10	90	200	0,8	2
2	20	30	100	240	0,8	2
3	16	60	100	160	0,4	2
4	25	25	80	120	0,4	2
5	15	40	120	130	0,4	1



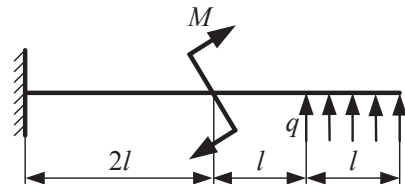
Задание 4.45

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	0,8	5, № 14
2	50	30	120	0,6	5, № 18
3	25	60	100	0,9	5, № 16
4	20	20	80	0,8	5, № 20
5	15	10	100	1	5, № 20



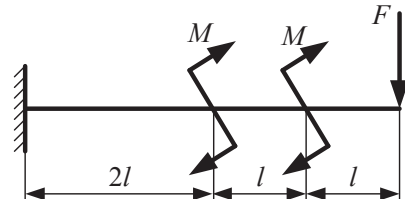
Задание 4.46

Вариант	$M$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	16	100	0,8	6, № 10
2	20	10	120	1	6, № 12
3	15	40	160	0,8	6, № 14
4	10	20	110	0,6	6, № 16
5	12	10	120	0,4	6, № 16



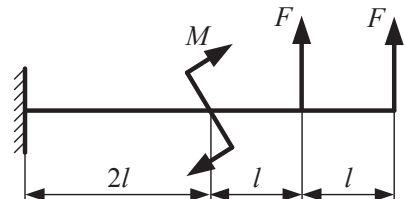
Задание 4.47

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	30	10	100	160	1	3
2	20	10	120	200	1	4
3	30	10	80	200	0,8	3
4	20	12	100	160	0,8	4
5	20	20	110	180	0,6	3



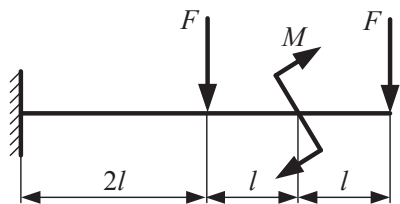
Задание 4.48

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	10	90	200	0,8	2
2	20	30	100	340	0,8	1
3	16	60	100	160	0,4	2
4	25	25	80	120	0,4	2
5	15	40	120	230	0,4	1



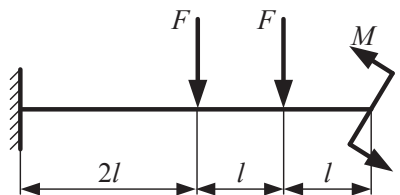
Задание 4.49

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	100	0,8	1
2	50	30	120	200	0,6	2
3	25	60	100	210	0,9	2
4	20	20	80	200	0,8	2
5	15	10	100	210	1	2



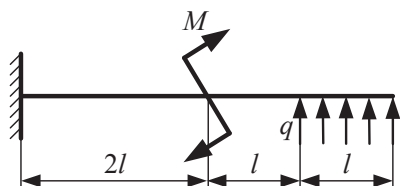
Задание 4.50

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	20	20	100	160	0,8	3
2	25	20	120	100	1	4
3	20	15	160	240	0,8	3
4	30	10	110	200	0,6	4
5	10	12	120	210	0,4	3



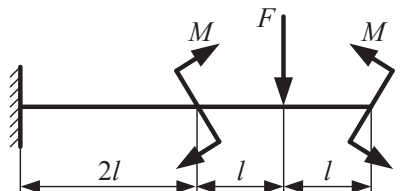
Задание 4.51

Вариант	$M$	$q$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	40	16	100	300	1	3
2	20	20	120	200	1	4
3	20	20	80	300	0,8	3
4	12	16	100	200	0,8	4
5	20	18	110	200	0,6	3



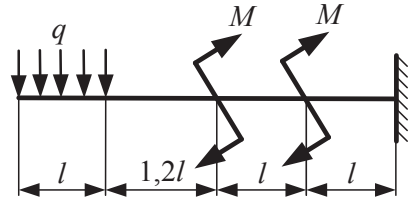
Задание 4.52

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	10	90	200	0,8	2
2	20	30	100	400	0,8	2
3	26	60	100	216	0,4	2
4	25	25	80	212	0,4	2
5	25	40	120	230	0,4	1



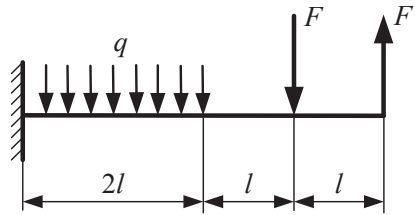
Задание 4.53

Вариант	$q$	$M$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	50	40	100	210	0,8	4
2	50	30	120	220	0,6	3
3	30	60	100	210	0,9	3
4	20	20	80	220	0,8	3
5	40	10	100	210	1	4



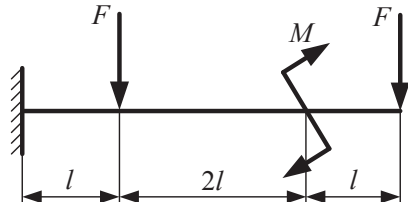
Задание 4.54

Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	16	100	0,8	6, № 14
2	25	10	120	1	5, № 14
3	20	40	160	0,8	6, № 16
4	30	20	110	0,6	5, № 12
5	10	10	120	0,4	6, № 18



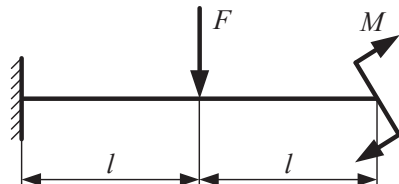
Задание 4.55

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	30	10	100	1	6, № 14
2	20	10	120	1	5, № 14
3	30	10	80	0,8	6, № 16
4	20	12	100	0,8	5, № 12
5	20	20	110	0,6	6, № 18



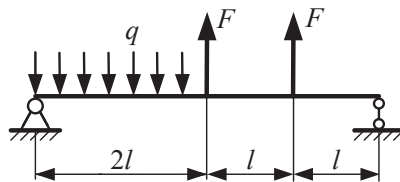
Задание 4.56

Вариант	$F$	$M$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	10	90	0,8	6, № 16
2	20	30	100	0,8	5, № 14
3	16	60	100	0,4	5, № 18
4	25	25	80	0,4	6, № 12
5	15	40	120	0,4	6, № 18



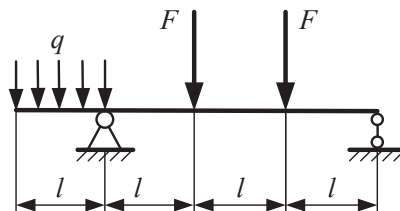
Задание 4.57

Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	50	10	100	0,8	5, № 14
2	50	20	120	0,6	5, № 18
3	25	10	100	0,9	5, № 16
4	20	20	80	0,8	5, № 20
5	15	10	100	1	5, № 20



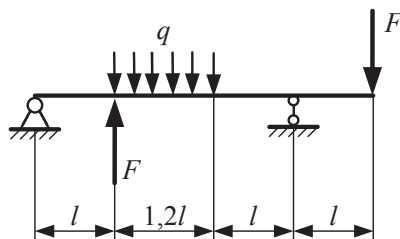
Задание 4.58

Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$l$	Вид сечения
1	20	16	100	0,8	6, № 10
2	25	10	120	1	6, № 12
3	20	40	160	0,8	6, № 14
4	30	20	110	0,6	6, № 16
5	10	10	120	0,4	6, № 16



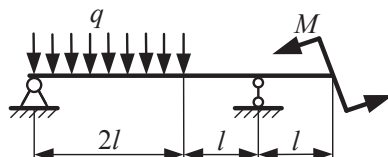
Задание 4.59

Вариант	$F$	$q$	$[\sigma]$	$h$	$l$	Вид сечения
1	30	20	100	160	1	3
2	20	16	120	200	1	4
3	30	40	80	200	0,8	3
4	20	12	100	160	0,8	4
5	20	20	110	180	0,6	3



Задание 4.60

Вариант	$q$	$M$	$[\sigma]$	$D$	$l$	Вид сечения
1	20	10	90	200	0,8	2
2	20	30	100	340	0,8	1
3	16	60	100	160	0,4	2
4	25	25	80	120	0,4	2
5	15	40	120	230	0,4	1



## 5. Сложное сопротивление. Изгиб с кручением

### Задание 5.1

Вал механической передачи под действием системы сил, приложенных к посаженным на него деталям (шкивы, зубчатые колеса и др.), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , которая соответствует частоте вращения вала  $n$ . Момент движущих сил подведен к детали (деталям) 1.

На основании исходных данных (табл. 5.1) и схем 5.1...5.30 определить диаметр вала  $d_v$  из условия прочности в опасном сечении, если заданы:

- передаваемая мощность  $P$ ;
- частота вращения  $n$ ;
- диаметры зубчатых колес  $d$  (или модуль  $m$  и число зубьев колеса  $z$ );
- диаметры шкивов  $D$ ;
- линейный размер  $l$ ;
- допускаемое напряжение материала вала  $[\sigma]$ .

Соотношение сил принять таковым:

$$F_r = 0,38F_t;$$

$$F_a = 0,15F_t;$$

$$F_1 = 2F_2.$$

При расчете использовать четвертую теорию прочности.

Таблица 5.1

Исходные данные к заданию 5.1

Параметры	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P$ , кВт	4	5	6	6,5	7	8	10	12	9	5
$n$ , мин <sup>-1</sup>	200	120	250	250	300	300	350	350	300	200
$d_1$ , мм	60	63	70	100	100	80	120	120	100	75
$d_2$ , мм	120	160	210	240	240	150	300	200	240	220
$D$ , мм	180	200	250	315	315	224	400	280	280	280
$m$ , мм	2	2	3	3	3	4	4	4	3	3
$z$	40	40	50	50	50	25	25	25	50	20
$l$ , мм	100									
$[\sigma]$ , МПа	50									

### Задание 5.2

На основании исходных данных (табл. 5.2) и схем 5.1...5.30 дать заключение о прочности вала диаметром  $d_v$ , который подвергается совместному действию деформации изгиба, кручения и растяжения. Момент (моменты) движущих сил  $T$  приложен к детали (деталям), которая является ведущей и обозначена цифрой 1.

При решении задачи использовать третью теорию прочности.

Соотношение сил принять:

$$F_r = 0,38F_t;$$

$$F_a = 0,15F_t;$$

$$F_1 = 2F_2.$$

Таблица 5.2

Исходные данные к заданию 5.2

Параметры	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T$ , Н·м	180	200	200	300	300	250	400	500	600	400
$d_1$ , мм	60	50	50	60	50	50	40	50	45	50
$d_2$ , мм	180	100	100	150	150	180	160	250	250	200
$D$ , мм	224	200	180	250	200	200	250	280	400	250
$m$ , мм	2	2	3	3	3	4	4	4	3	2,5
$z$	25	25	30	30	40	20	20	25	30	50
$l$ , мм	100									
$d_v$ , мм	45	50	60	70	50	55	65	80	60	40
$[\sigma]$ , МПа	60				50				60	



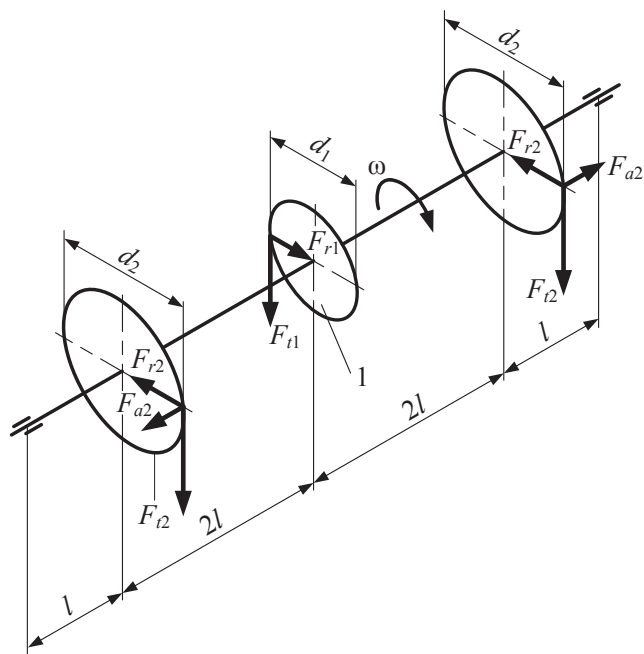


Схема 5.1

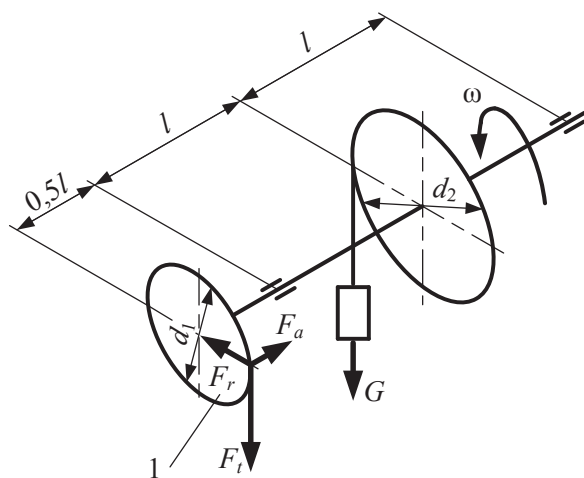


Схема 5.2

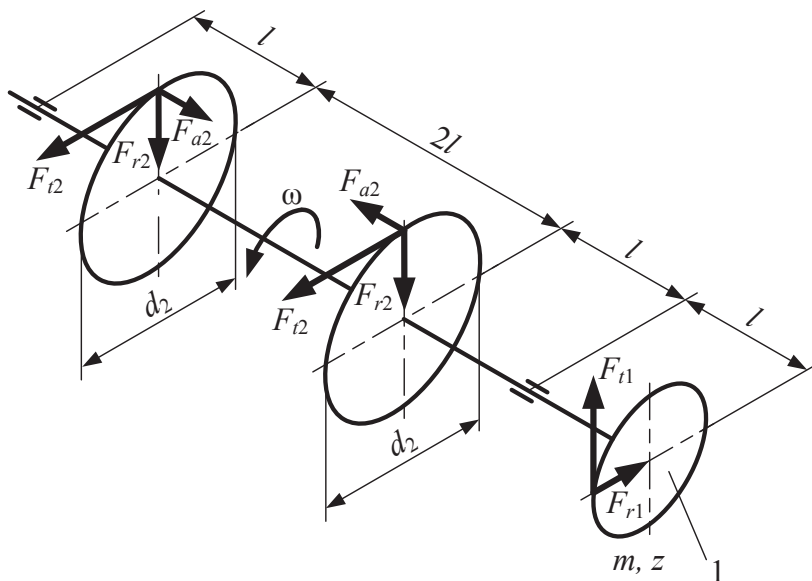


Схема 5.3

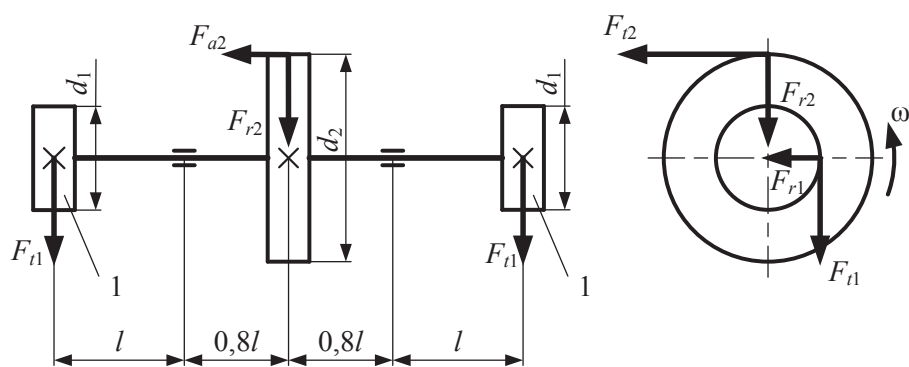


Схема 5.4

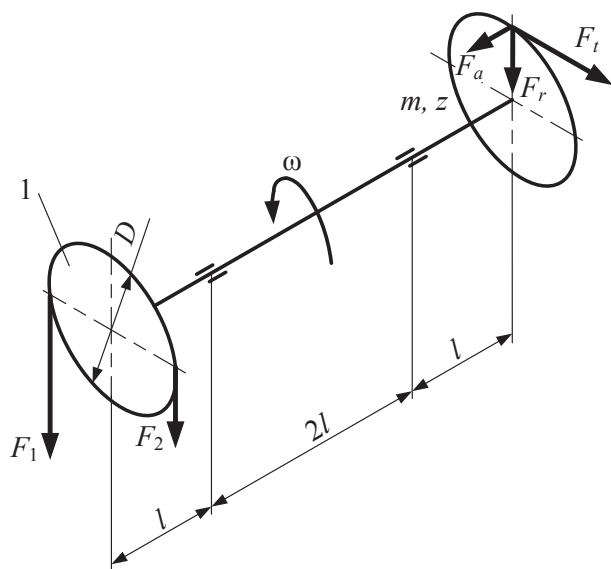


Схема 5.5

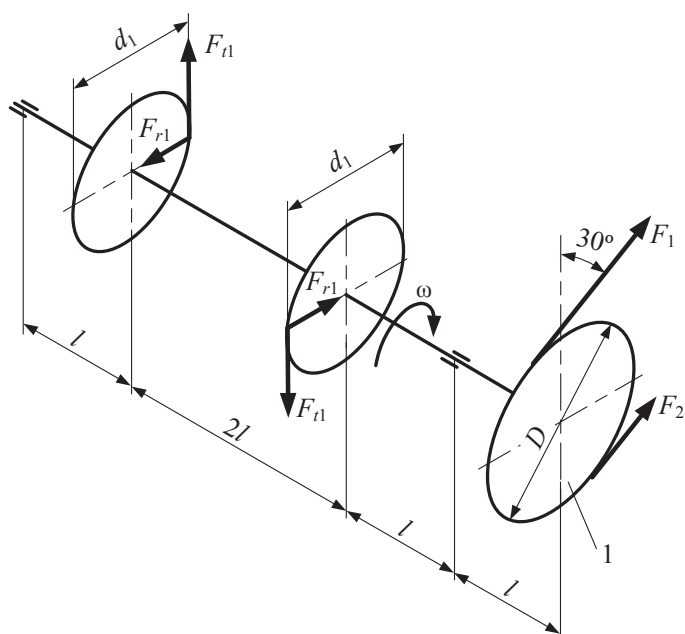


Схема 5.6

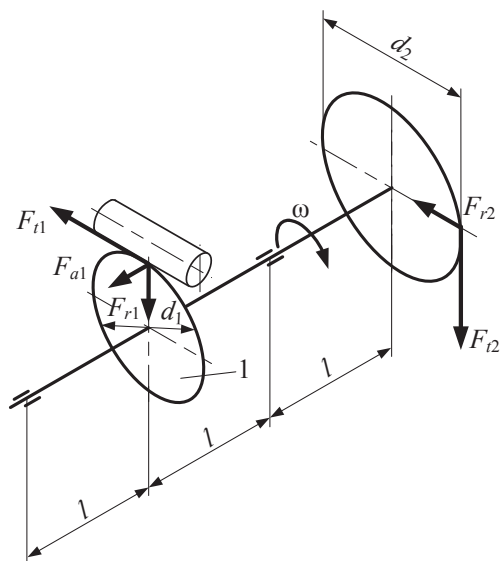


Схема 5.7

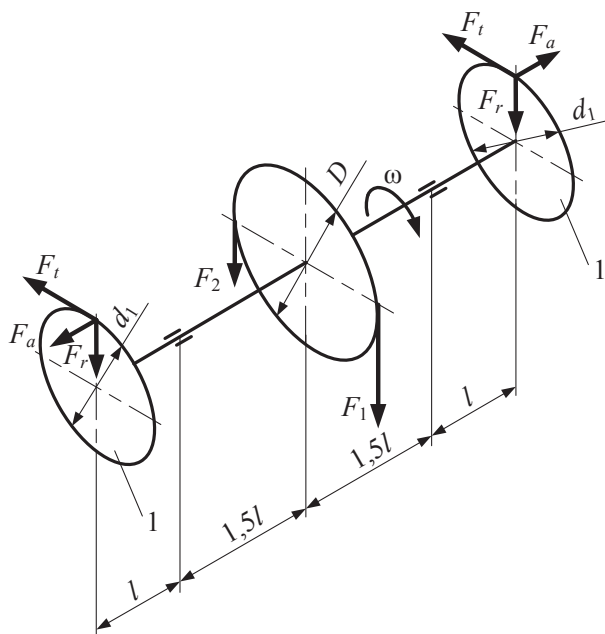


Схема 5.8

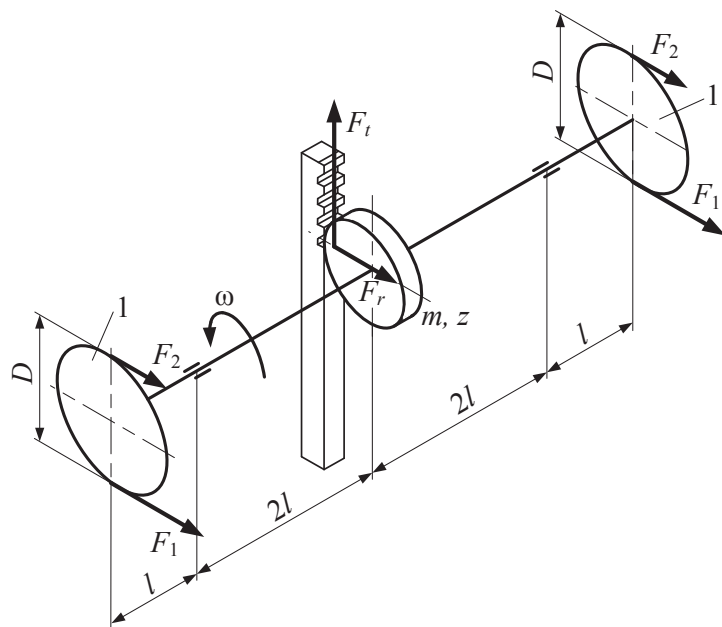


Схема 5.9

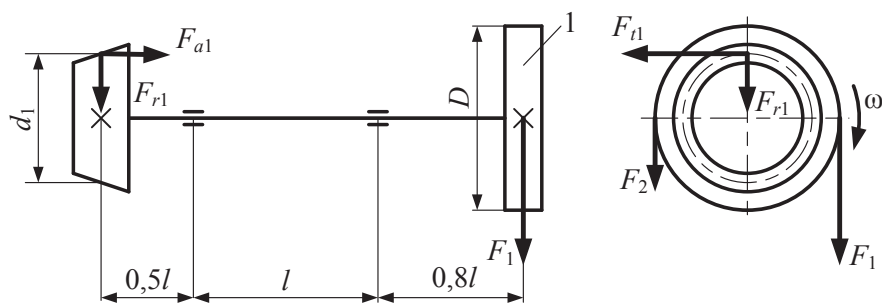


Схема 5.10

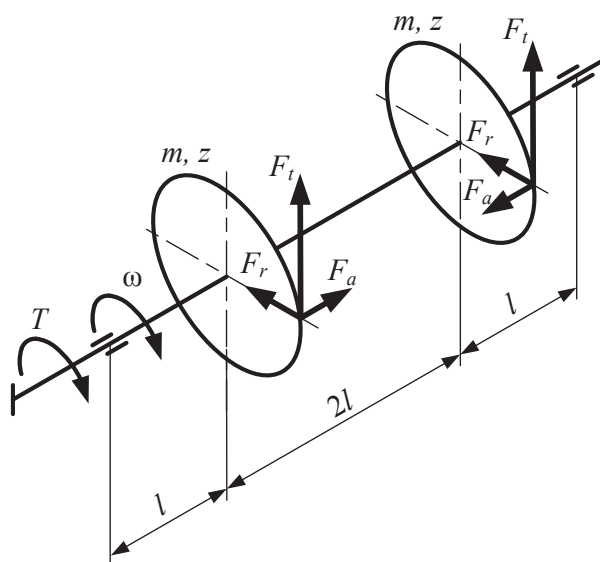


Схема 5.11

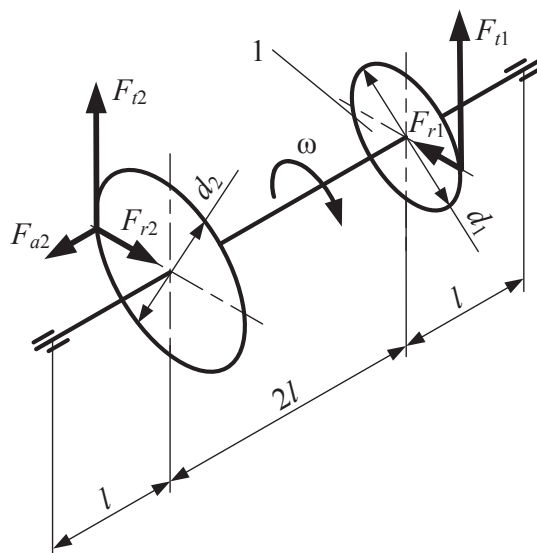


Схема 5.12

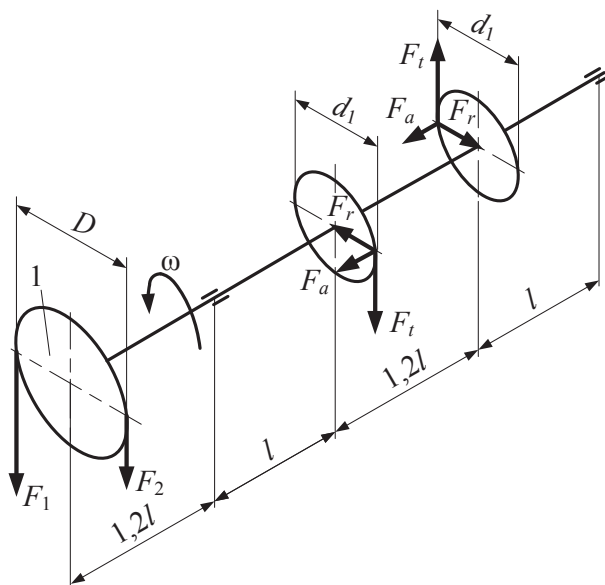


Схема 5.13

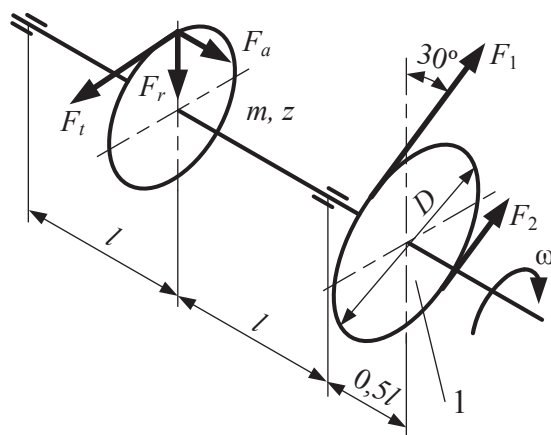


Схема 5.14

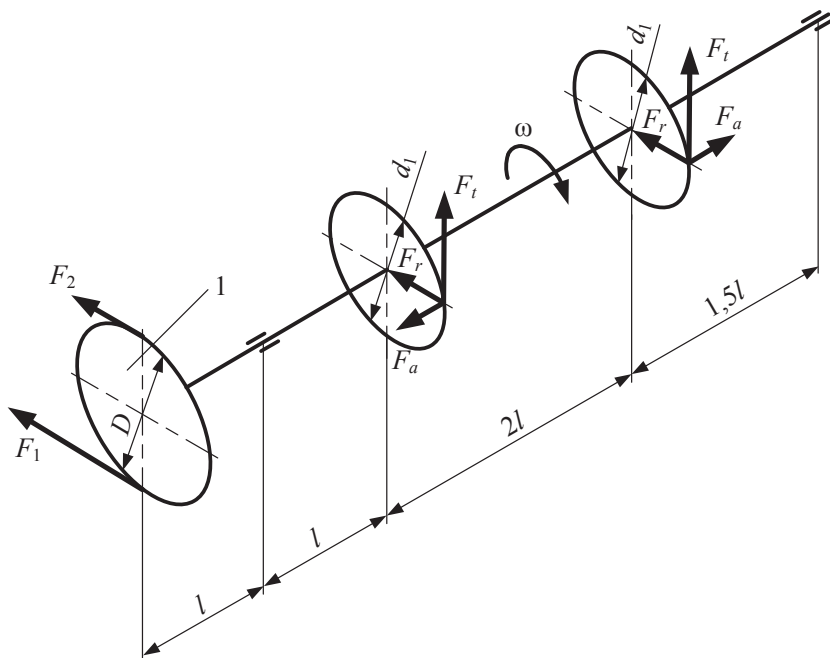


Схема 5.15

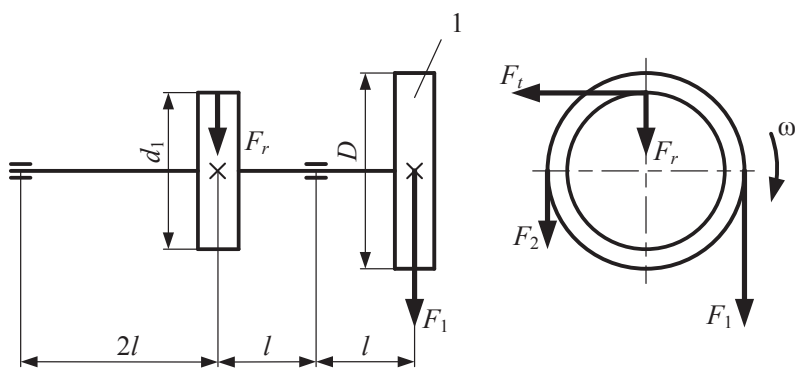


Схема 5.16



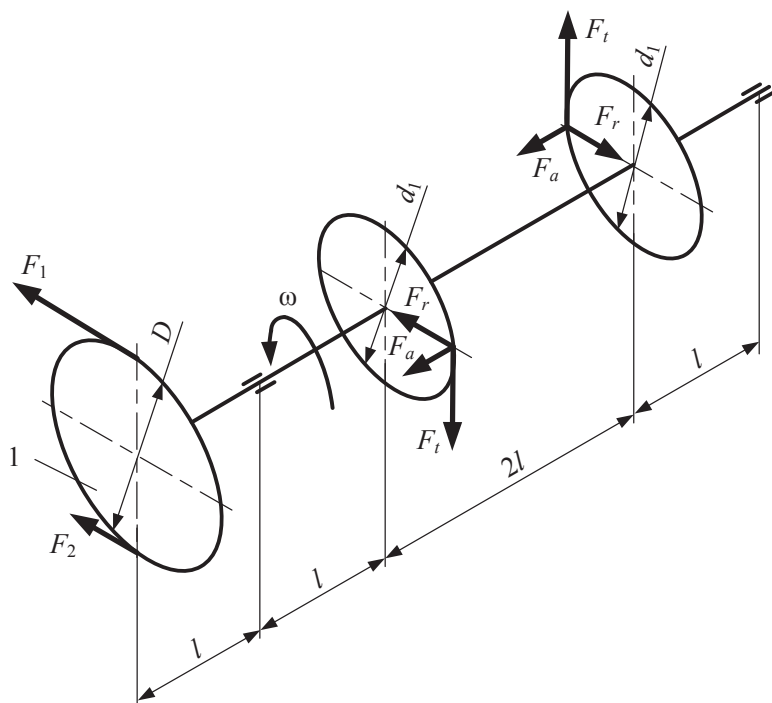


Схема 5.17

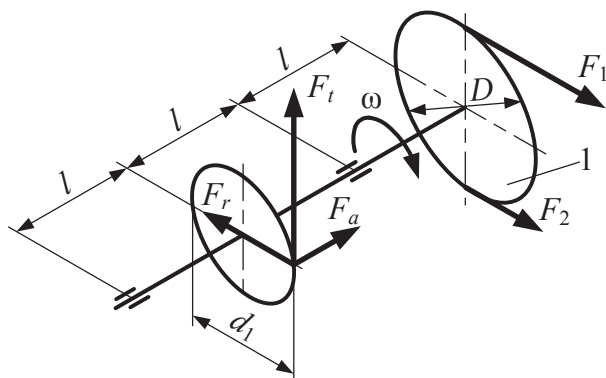


Схема 5.18

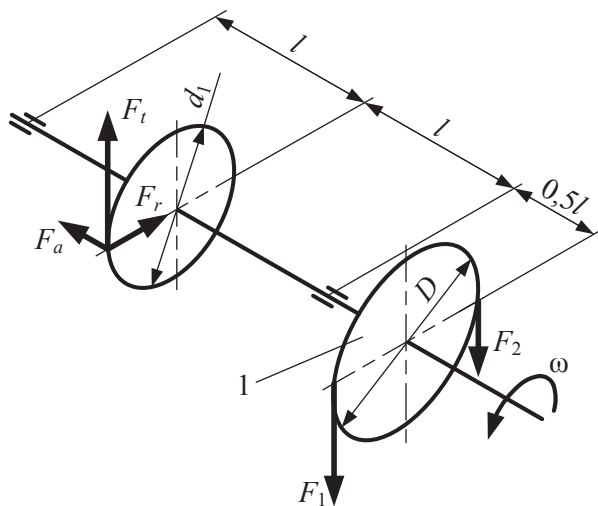


Схема 5.19

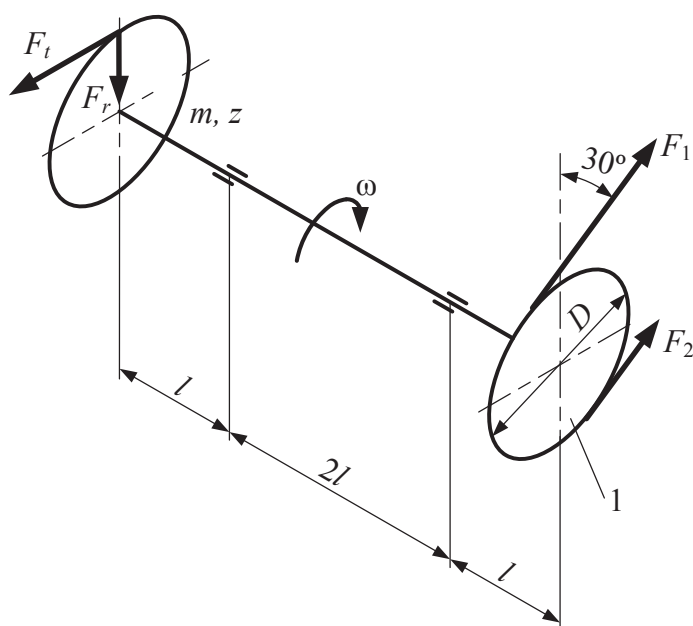


Схема 5.20

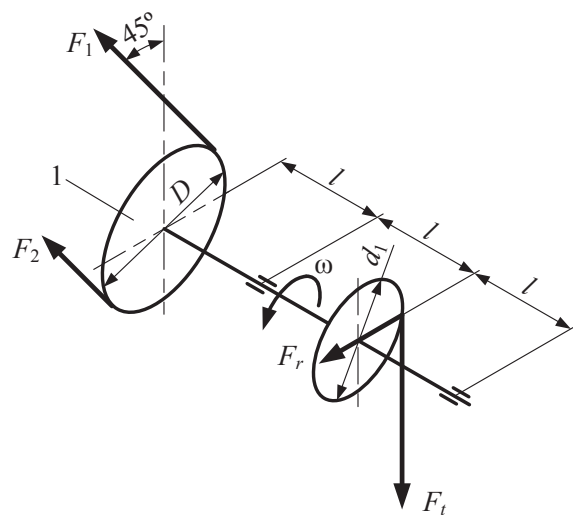


Схема 5.21

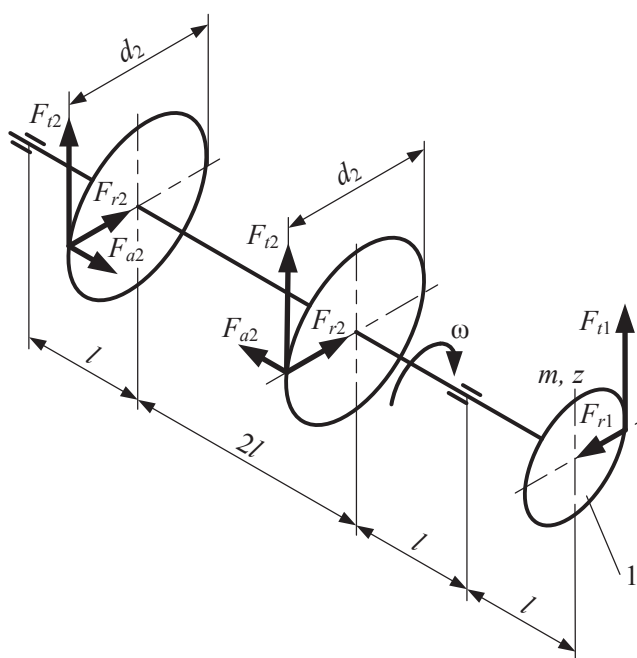


Схема 5.22



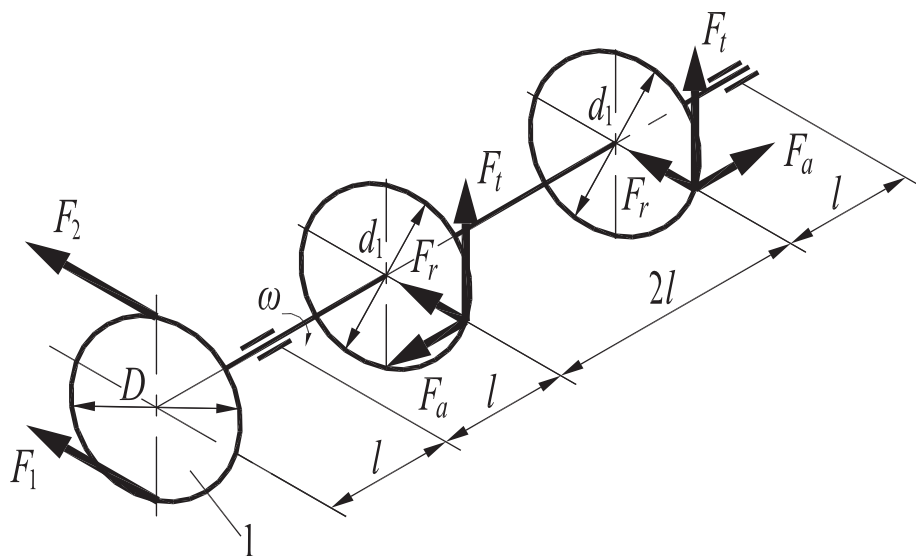


Схема 5.25

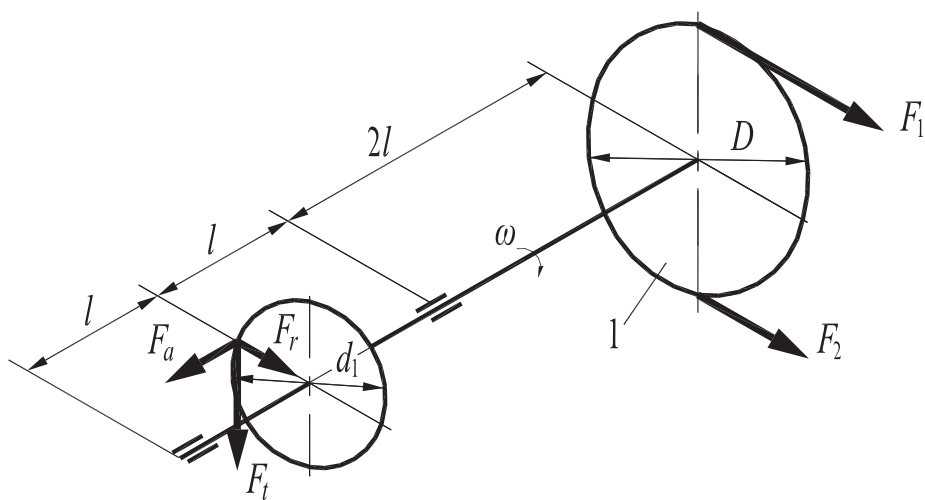


Схема 5.26

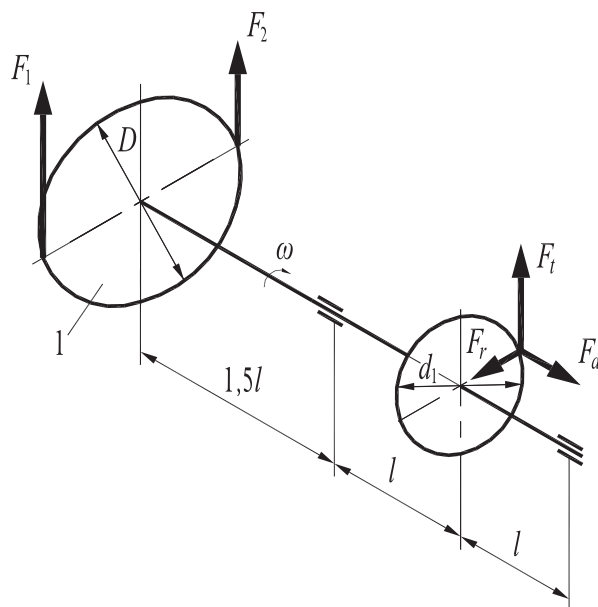


Схема 5.27

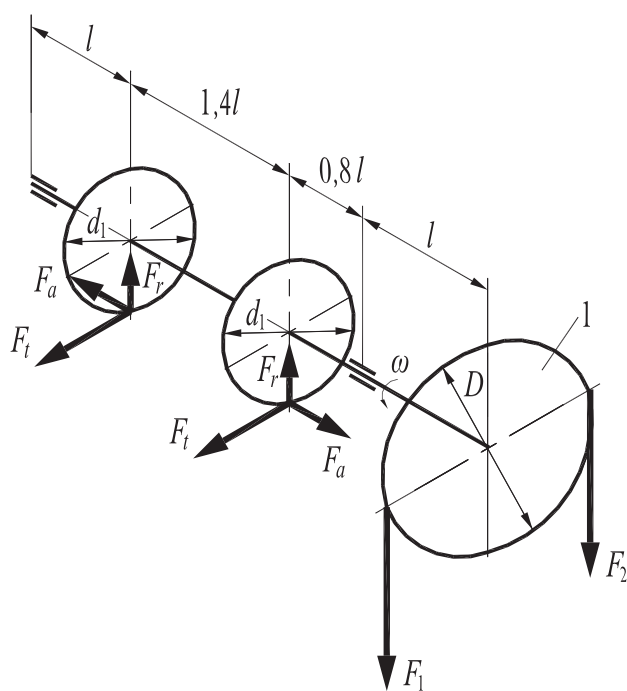


Схема 5.28

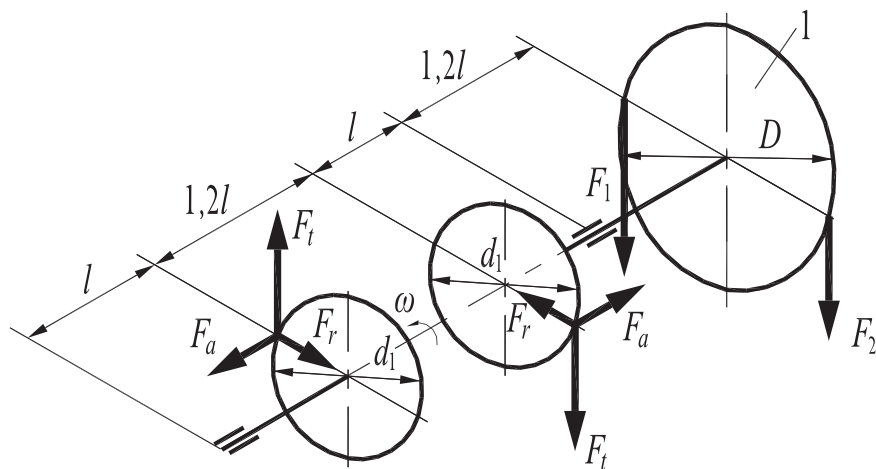


Схема 5.29

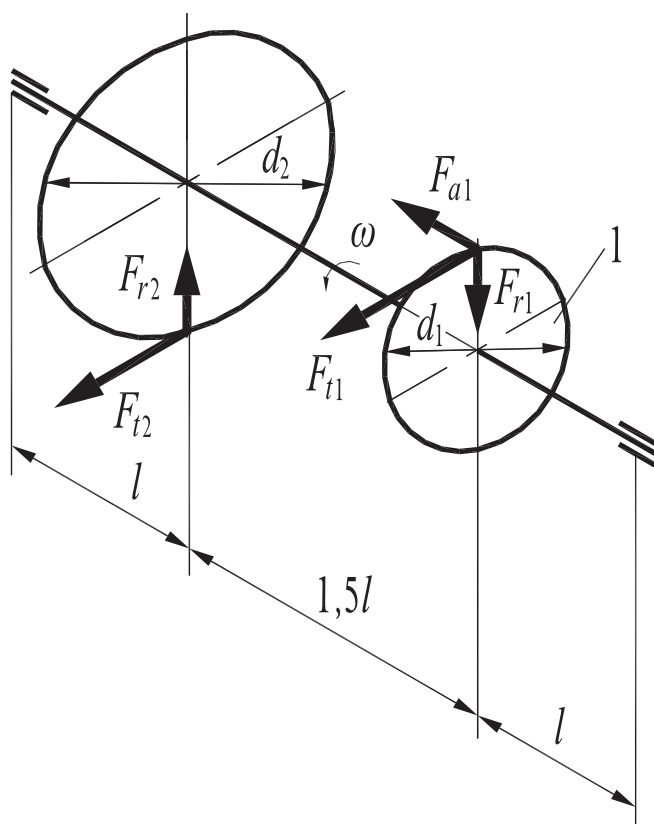


Схема 5.30

## 6. Прочность при циклически изменяющихся напряжениях

На основании исходных данных (см. таблицу ниже) и схем 6.1...6.7 определить запас усталостной прочности  $S$  в указанных сечениях вала.

**Заданы:** материал вала и его предел прочности  $\sigma_B$ , геометрические размеры сечения. Размеры шпоночного паза  $b \times t_1$  определить в зависимости от диаметра по ГОСТ 23360–78. Шероховатость обработки поверхности вала принять в диапазоне 0,32...2,5 мкм.

Значения изгибающих  $M_{из}$ ,  $M_{изу}$  и крутящего  $M_k$  моментов и нормальной силы  $N$  в конкретных сечениях определить с помощью непосредственного измерения эпюр. Масштабы построения эпюр  $K_{Ми}$ ,  $K_{Мк}$  и  $K_N$  заданы.

Пределы выносливости  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  определить из соотношений:

- для углеродистых сталей  $\sigma_{-1} = 0,43\sigma_B$ ;
- для легированных сталей  $\sigma_{-1} = 0,35\sigma_B + 100$ ;
- $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$ .

При решении задач полагать, что в вариантах 1...5 крутящий момент изменяется по отнулевому циклу, а в вариантах 6...10 — по симметричному.

Исходные данные к заданиям

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K_{Ми}$ , Н·м/мм	12	15	18	20	22	10	12	15	18	20
$K_{Мк}$ , Н·м/мм	15	20	15	20	15	20	15	20	15	20
$K_N$ , Н/мм	100	120	150	180	200	70	80	90	100	110
$d$ , мм	32	36	40	45	50	32	36	40	45	50
$d_1$ , мм	36	40	45	50	56	36	40	45	50	56
$d_2$ , мм	40	45	50	55	60	40	45	50	55	60
$d_3$ , мм	45	50	56	63	71	45	50	56	63	71
$d_4$ , мм	М36 × 1,5		М48 × 1,5			М36 × 1,5			М48 × 1,5	
$d_f$ , мм	50	52	58	65	73	50	52	58	65	73
$d_o$ , мм	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$r$ , мм	0,5	1,0	1,6	2,0	2,5	0,5	1,0	1,6	2,0	2,5
$t = r_1$ , мм	2,0		2,5			2,0		2,5		
$\sigma_B$ , МПа	570	730	680	730	740	780	780	880	590	730
Марка стали	45		40Х		40ХН		30ХГСА		50	



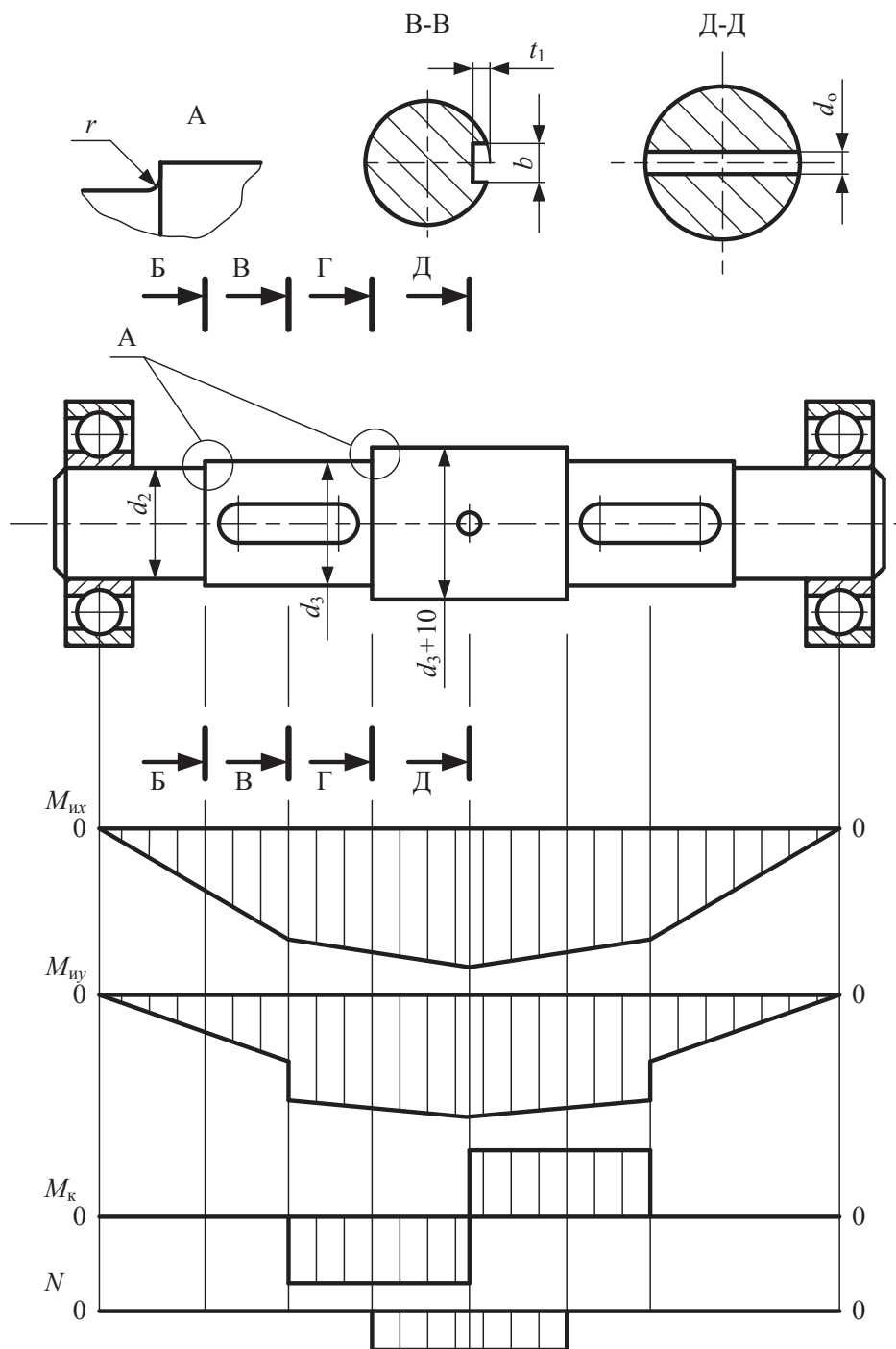


Схема 6.1

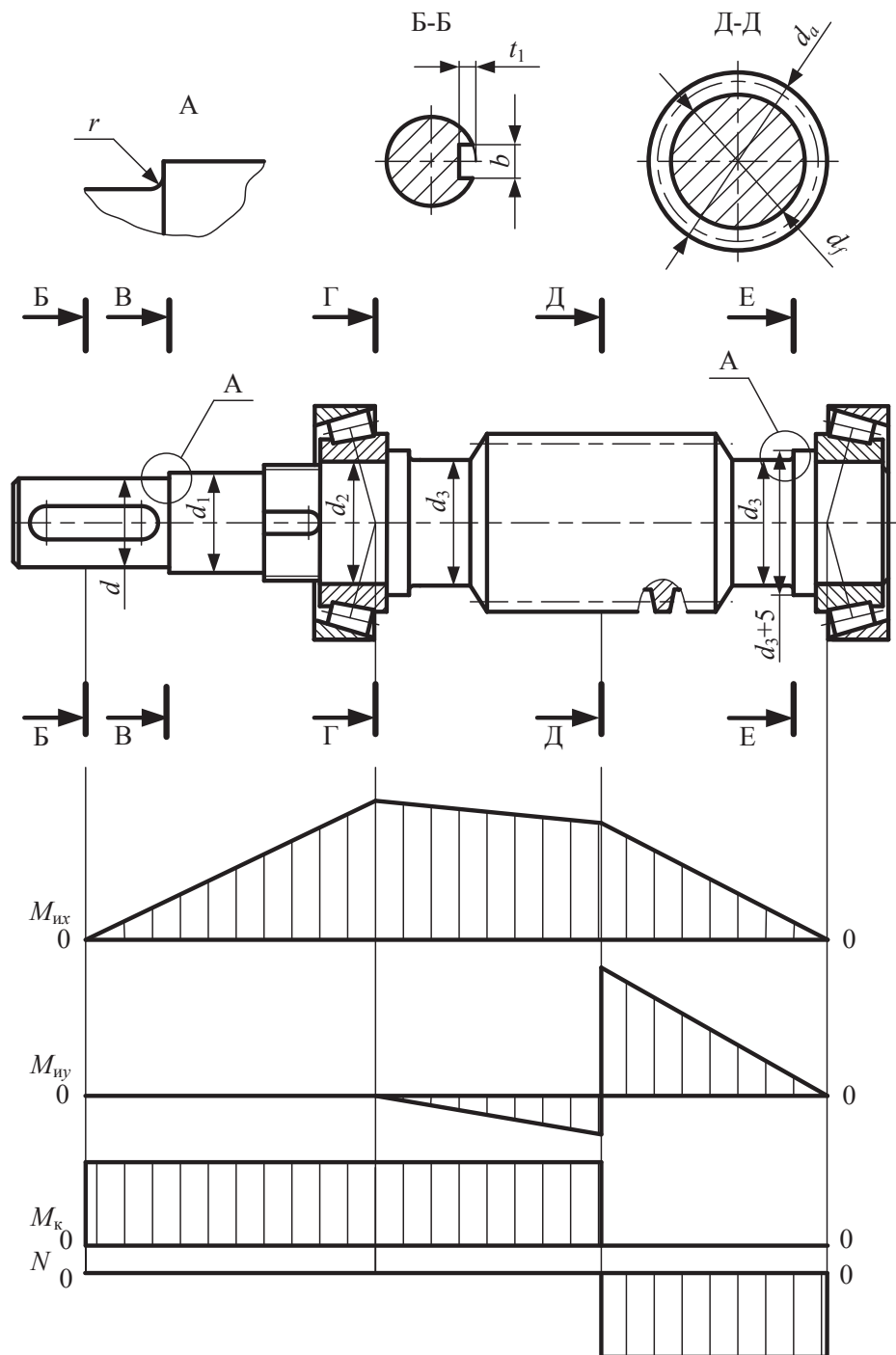


Схема 6.2

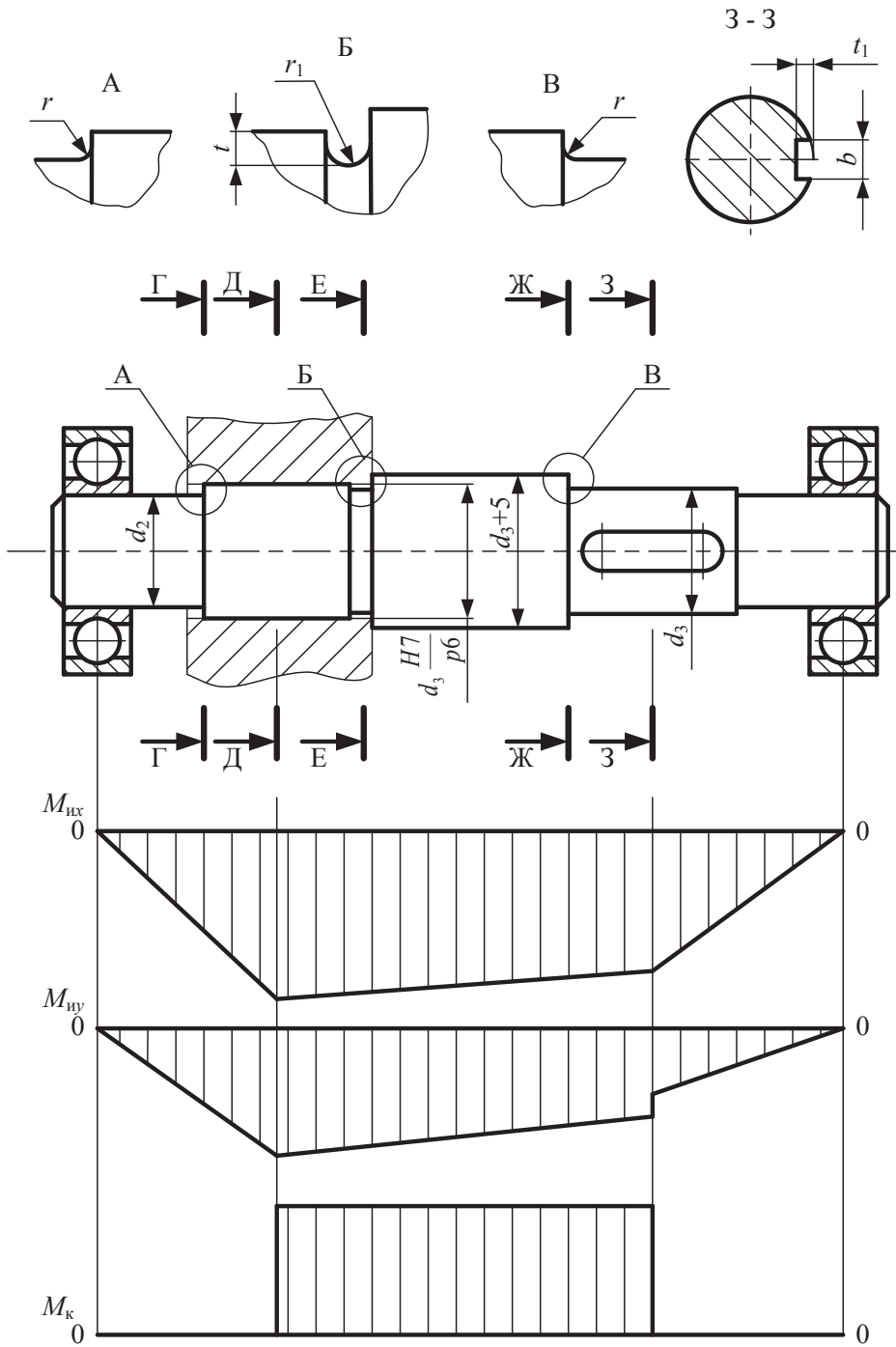


Схема 6.3

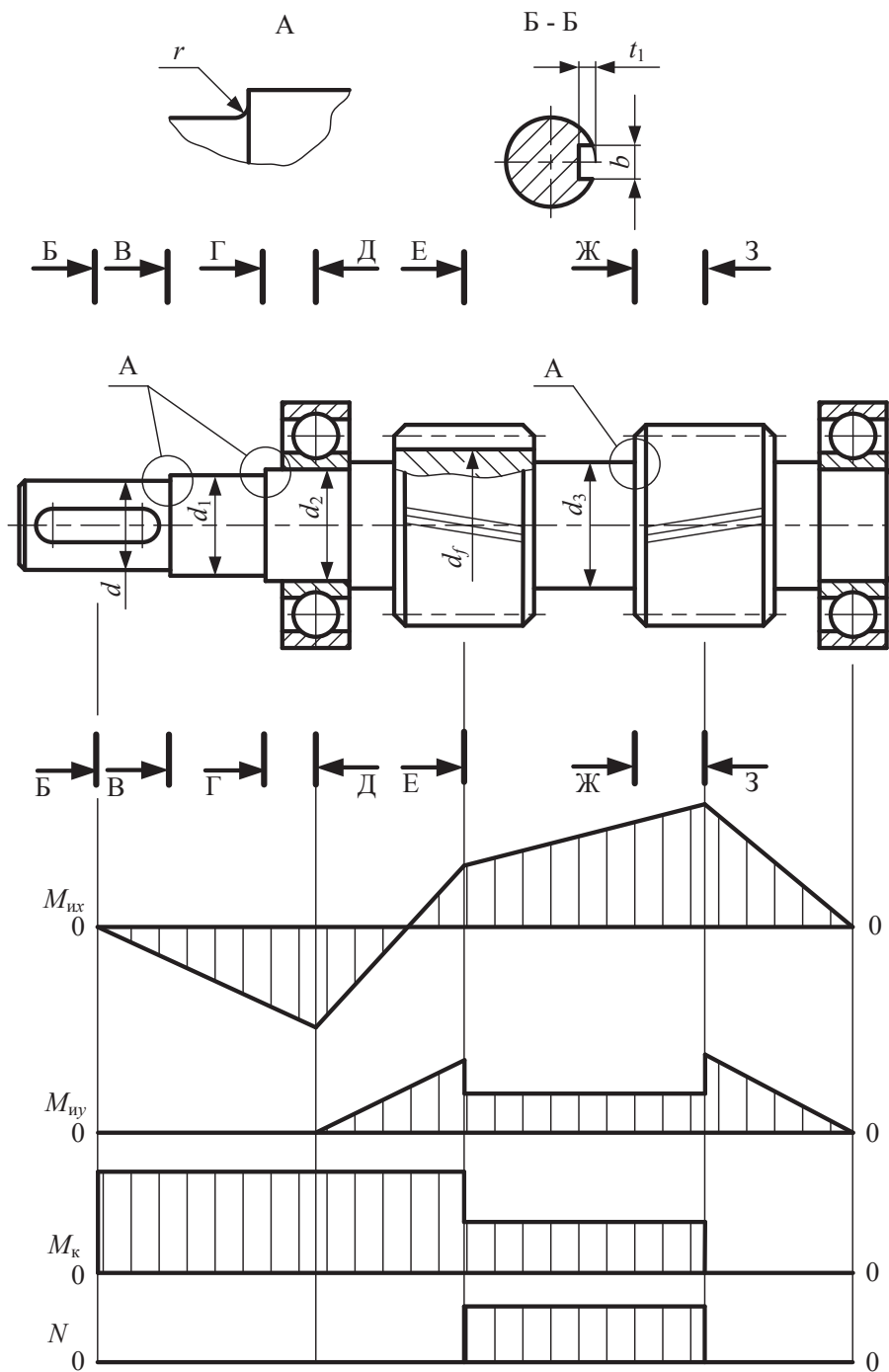


Схема 6.4

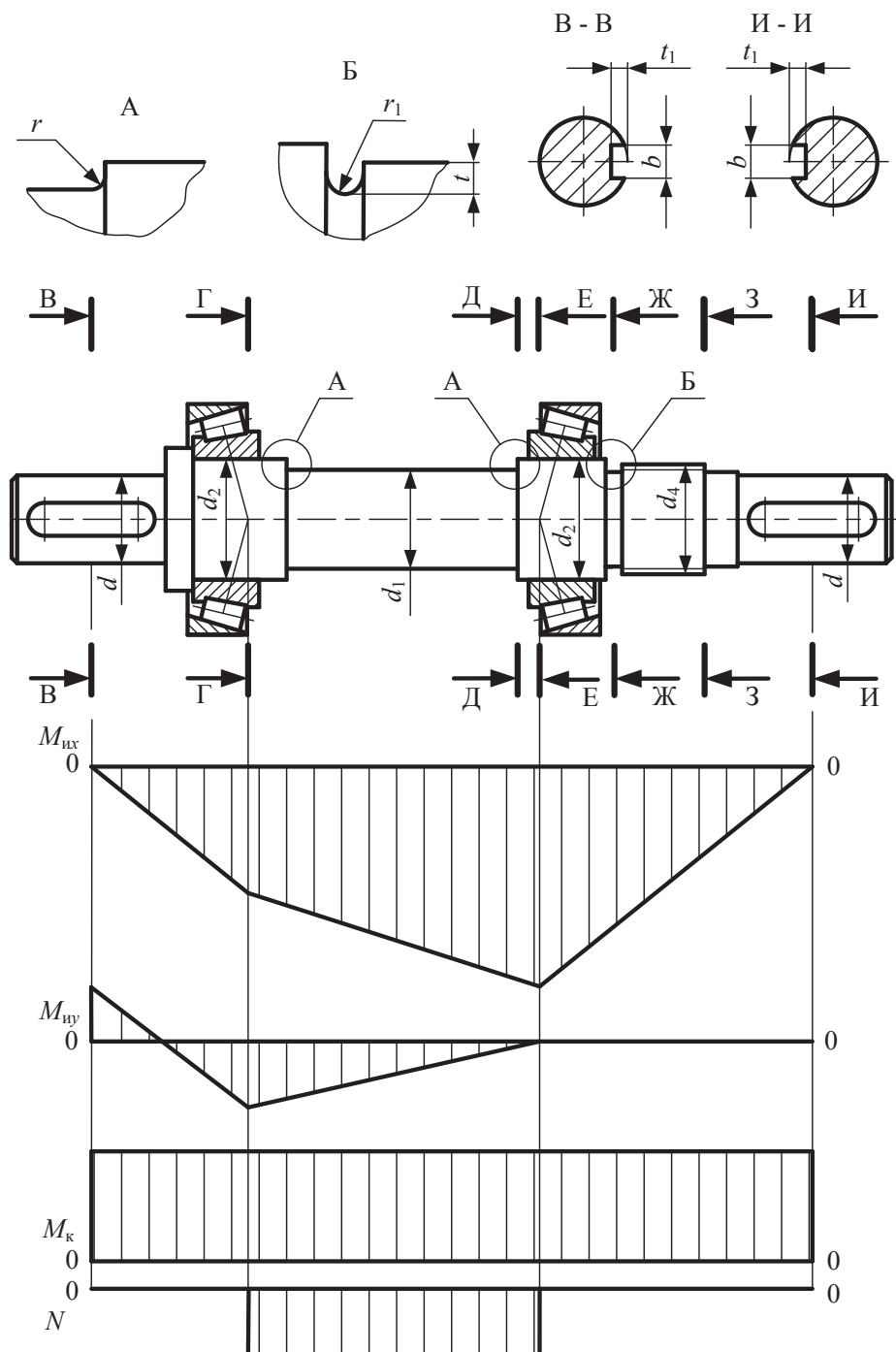


Схема 6.5

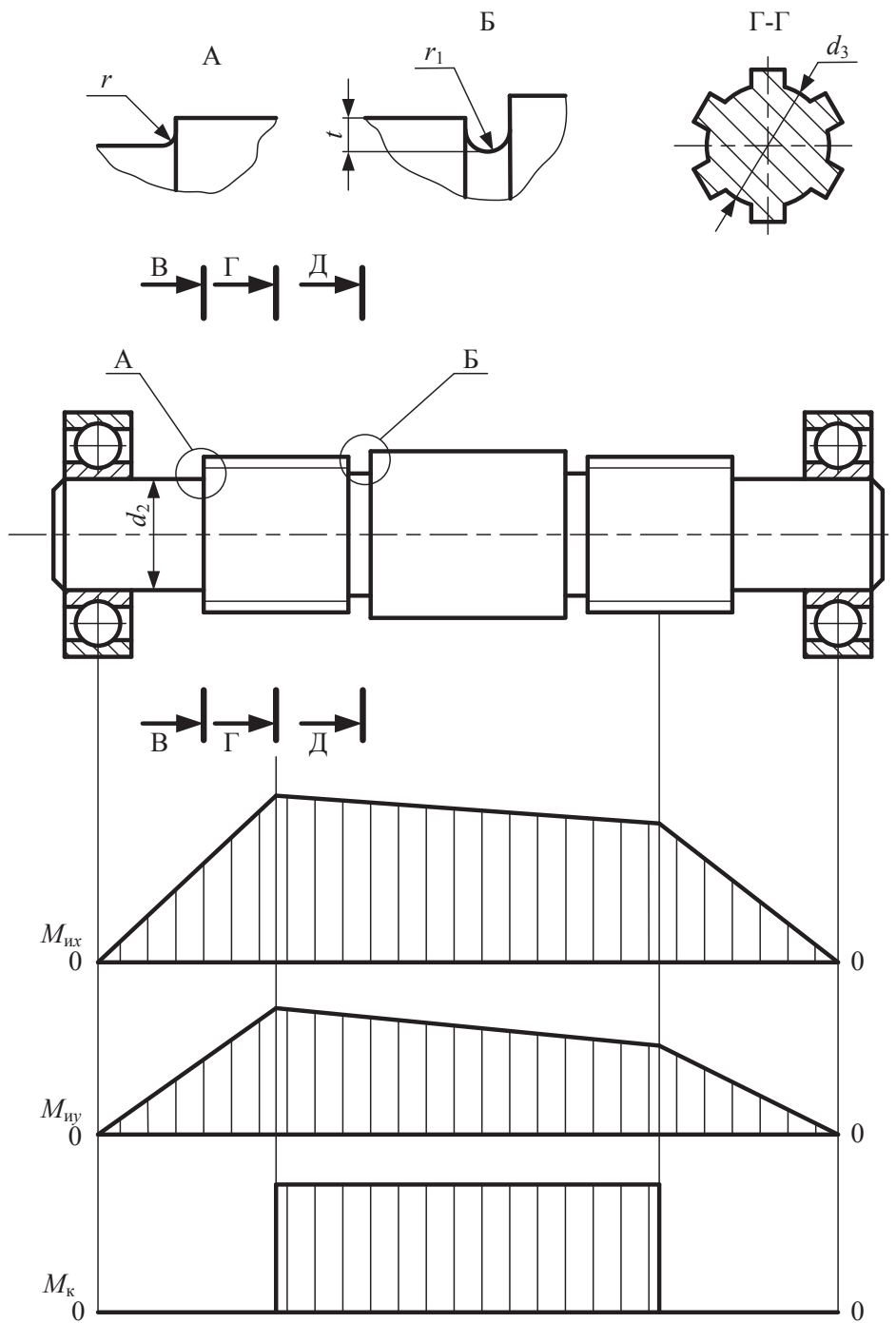


Схема 6.6

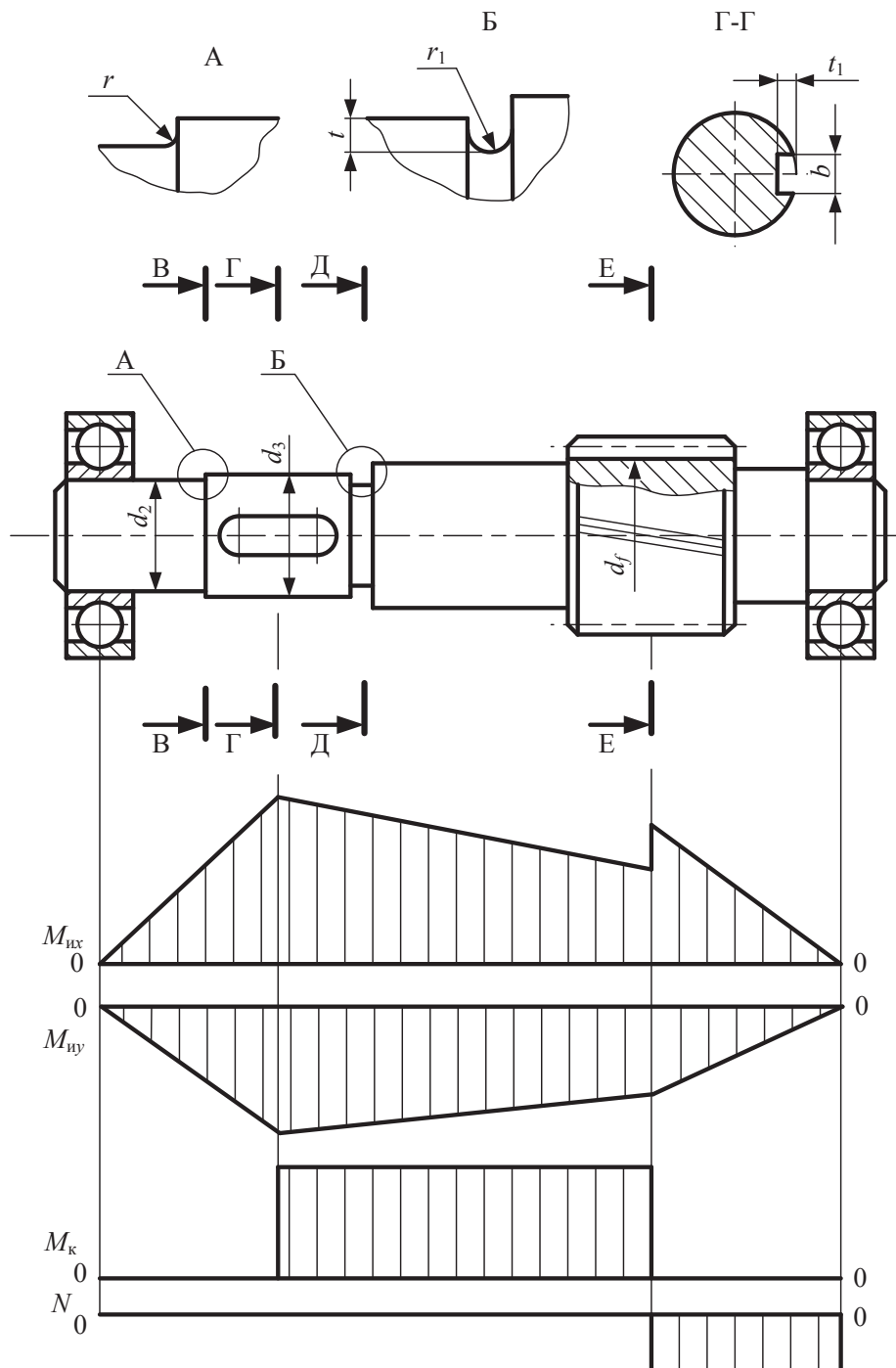


Схема 6.7

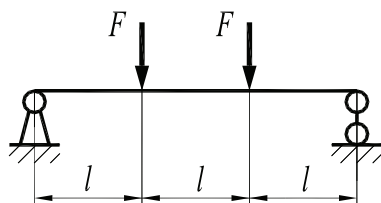
# Билеты для текущего контроля знаний

## Плоский поперечный изгиб

### Билет 1

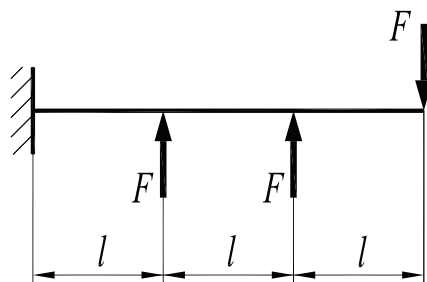
#### Задание 1.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



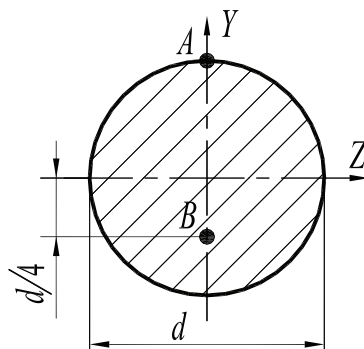
#### Задание 1.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



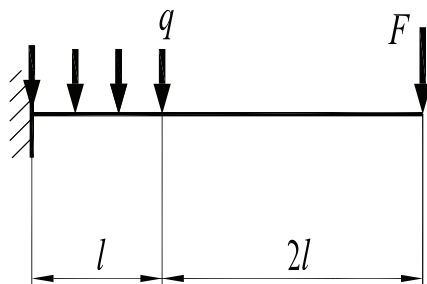
#### Задание 1.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Найти величины нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если  $d = 100 \text{ мм}$ .



#### Задание 1.4

Дана балка квадратного поперечного сечения. Найти геометрические размеры поперечного сечения балки, если  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 75 \text{ МПа}$ .

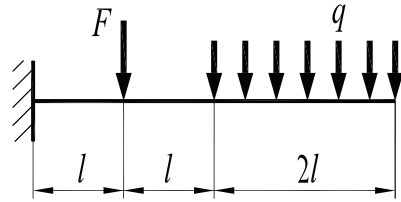




**Билет 2**

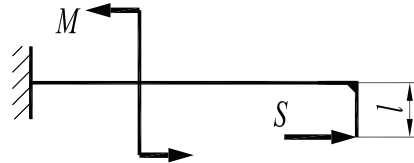
**Задание 2.1**

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



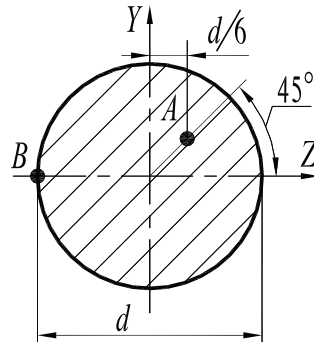
**Задание 2.2**

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  и внутренних продольных усилий  $N$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20$  кН·м,  $S = 200$  кН,  $l = 0,1$  м.



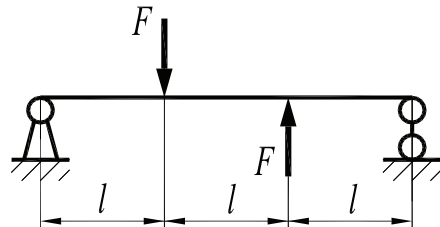
**Задание 2.3**

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ . В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20$  кН·м, диаметр  $d = 120$  мм и угол  $\alpha = 45^\circ$ .



**Задание 2.4**

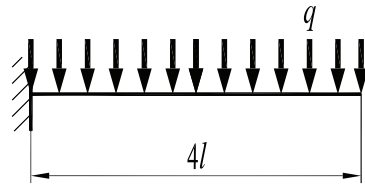
Дана балка квадратного поперечного сечения. Она нагружена силами  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить геометрические размеры поперечного сечения балки.



### Билет 3

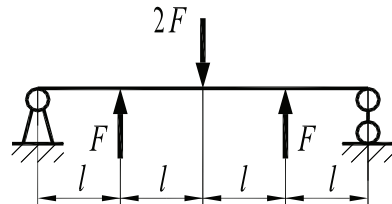
#### Задание 3.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



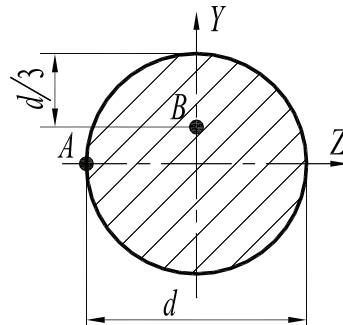
#### Задание 3.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



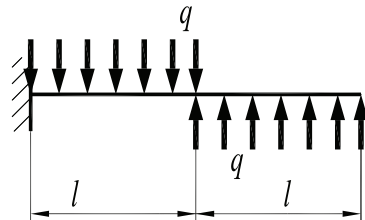
#### Задание 3.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 160 \text{ мм}$ .



#### Задание 3.4

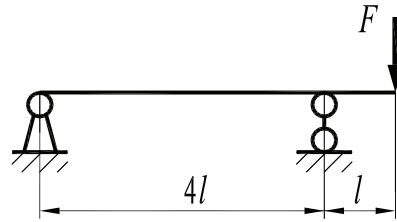
Определить величину максимального нормального напряжения для балки круглого поперечного сечения, диаметром  $d = 200 \text{ мм}$ , если  $q = 40 \text{ кН/м}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ .



**Билет 4**

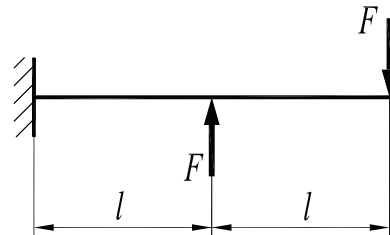
**Задание 4.1**

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 0,5$  м.



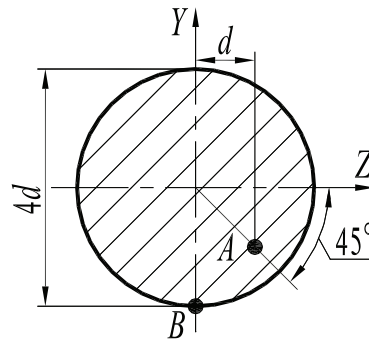
**Задание 4.2**

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



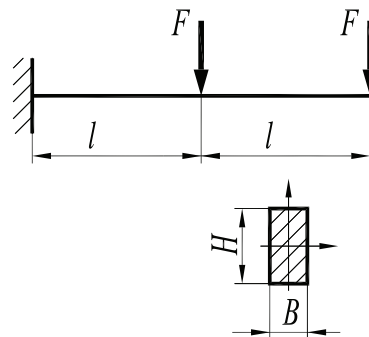
**Задание 4.3**

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 40$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 40$  мм.



**Задание 4.4**

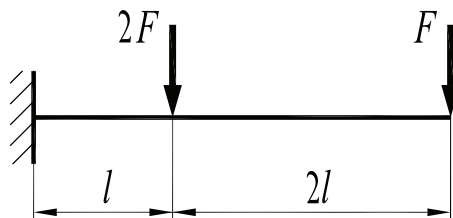
Дана балка прямоугольного сечения  $H \times B = 30 \times 15$  см. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Проверить прочность балки, если  $F = 40$  кН,  $l = 1$  м.



### Билет 5

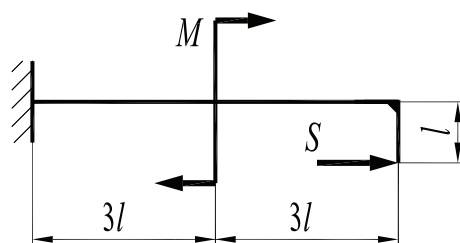
#### Задание 5.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



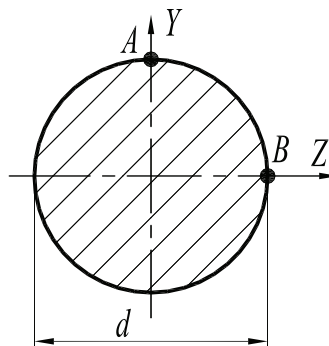
#### Задание 5.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20$  кН·м,  $S = 40$  кН,  $l = 0,5$  м.



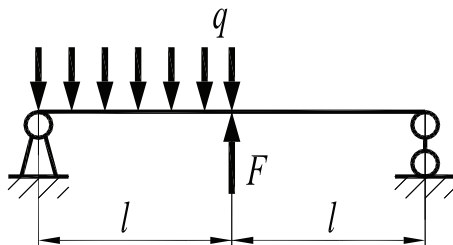
#### Задание 5.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 40$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 200$  мм.



#### Задание 5.4

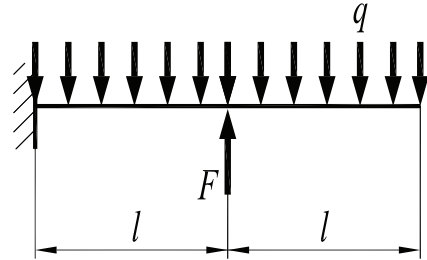
Балка в поперечном сечении — квадрат со стороной  $h$ . Найти  $h$ , если  $F = 20$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $l = 1$  м. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 150$  МПа.



## Билет 6

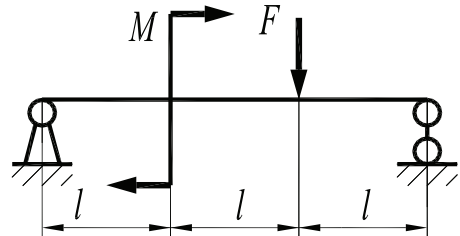
## Задание 6.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



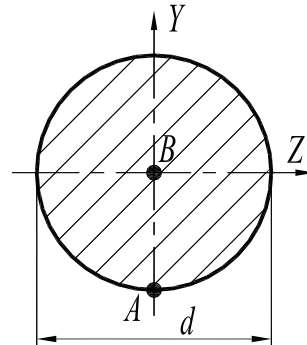
## Задание 6.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 30$  кН·м,  $F = 20$  кН,  $l = 0,5$  м.



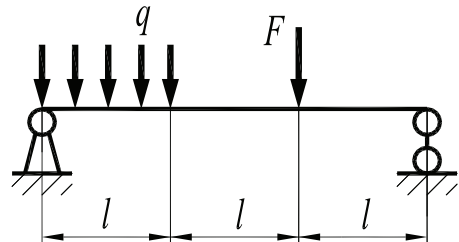
## Задание 6.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 10$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 100$  мм.



## Задание 6.4

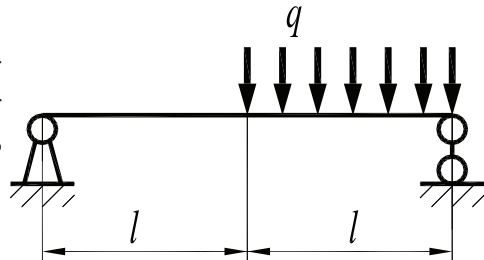
Балка в поперечном сечении — круг диаметром  $d$ . Найти диаметр  $d$ , если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 80$  МПа.



### Билет 7

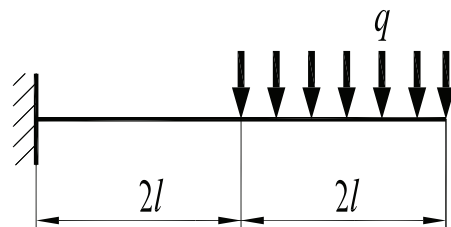
#### Задание 7.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1,5 \text{ м}$ .



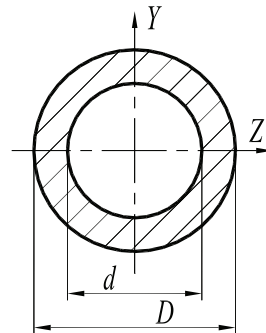
#### Задание 7.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ .



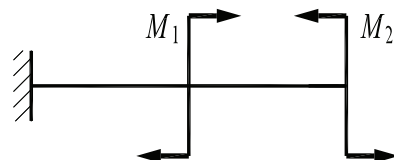
#### Задание 7.3

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения (кольцо с отношением диаметров  $d/D = 0,7$ ) при допускаемом напряжении материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  и изгибающем моменте  $M_z = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , действующем в сечении.



#### Задание 7.4

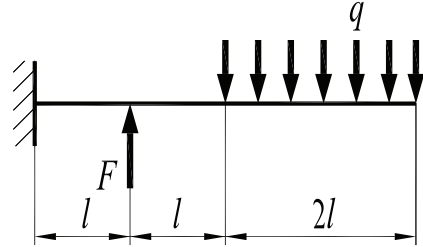
Балка в поперечном сечении — квадрат со стороной  $h$ . Найти  $h$ , если  $M_1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $M_2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .



## Билет 8

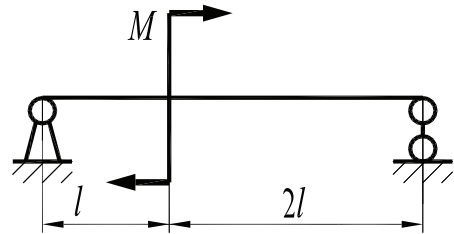
## Задание 8.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



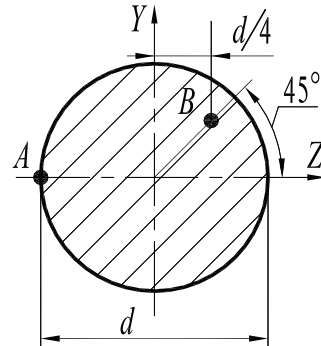
## Задание 8.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если изгибающий момент  $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



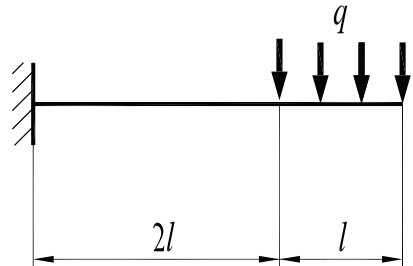
## Задание 8.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 100 \text{ мм}$ .



## Задание 8.4

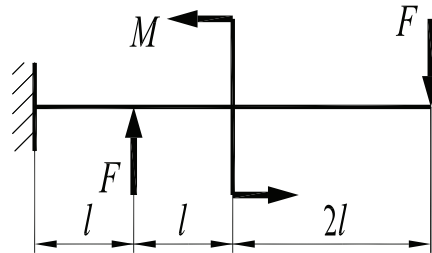
Балка в поперечном сечении — квадрат со стороной  $h$ . Определить  $h$ , если  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .



### Билет 9

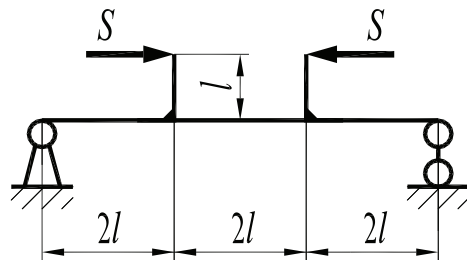
#### Задание 9.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



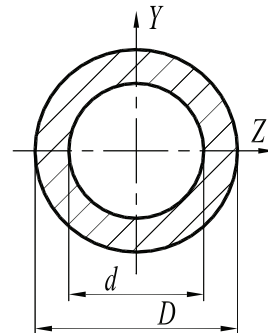
#### Задание 9.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $S = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ .



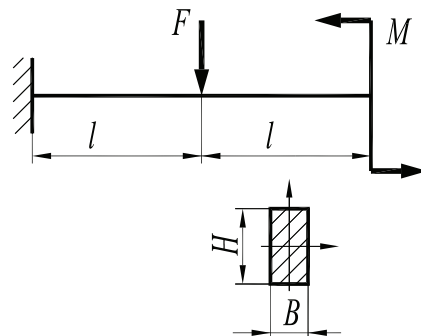
#### Задание 9.3

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения (кольцо с отношением диаметров  $d/D = 0,6$ ) при допуске напряжении материала балки  $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$  и изгибающем моменте  $M_z = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , действующем в сечении.



#### Задание 9.4

Дана балка прямоугольного сечения  $H \times B = 20 \times 10 \text{ см}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 130 \text{ МПа}$ . Проверить прочность балки, если  $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $F = 40 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .

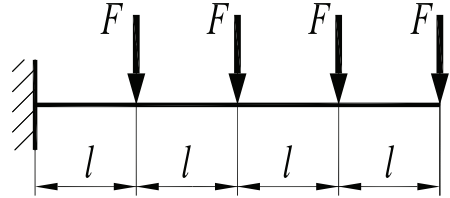




## Билет 10

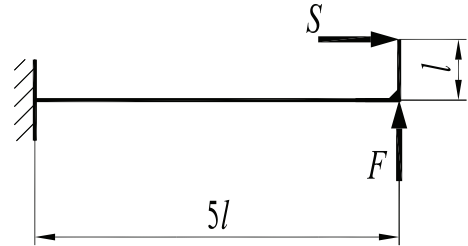
## Задание 10.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м.



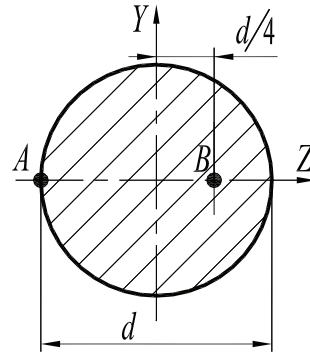
## Задание 10.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10^5$  Н,  $S = 5 \cdot 10^5$  Н,  $l = 0,1$  м.



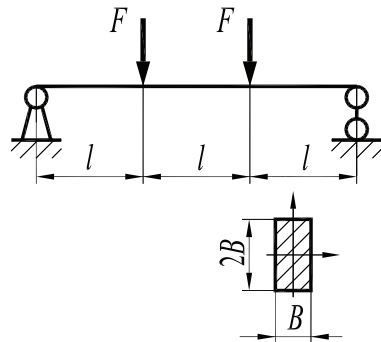
## Задание 10.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках A и B, если диаметр  $d = 200$  мм.



## Задание 10.4

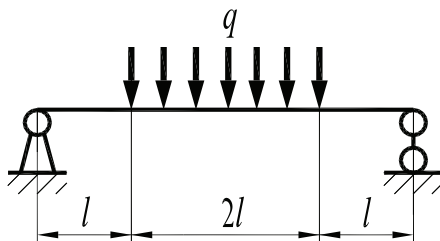
Балка прямоугольного сечения выполнена из стали Ст3. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить размеры поперечного сечения балки, если  $F = 16$  кН,  $l = 1$  м.



## Билет 11

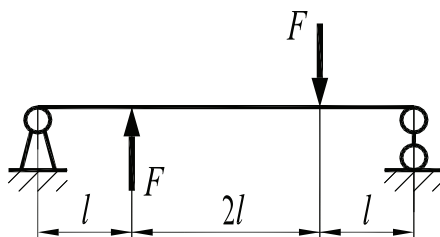
### Задание 11.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



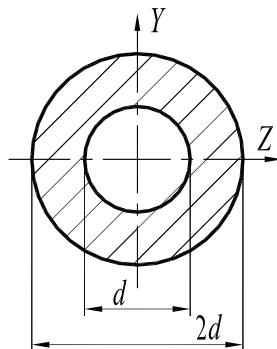
### Задание 11.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



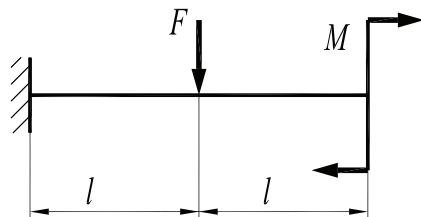
### Задание 11.3

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения. Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ . Действующий в сечении изгибающий момент  $M_Z = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



### Задание 11.4

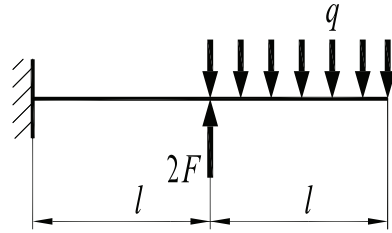
Балка круглого поперечного сечения нагружена изгибающим моментом  $M = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и силой  $F = 20 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Определить диаметр балки. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ .



## Билет 12

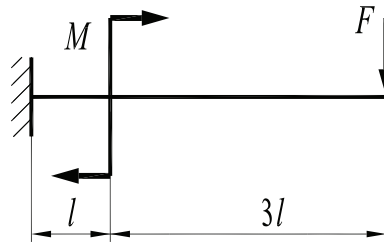
## Задание 12.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



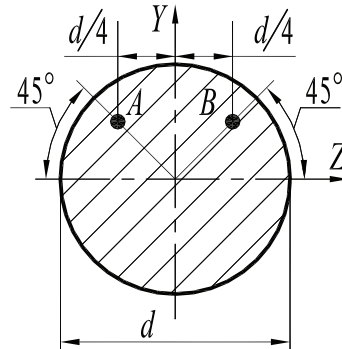
## Задание 12.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20$  кН·м,  $F = 10$  кН,  $l = 0,5$  м.



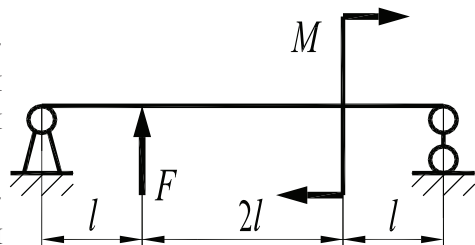
## Задание 12.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 20$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 120$  мм.



## Задание 12.4

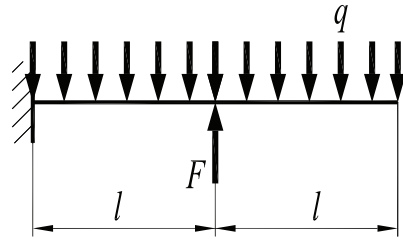
Балка круглого поперечного сечения выполнена из стали Ст3. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить диаметр поперечного сечения балки, если  $M = 10$  кН·м,  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



### Билет 13

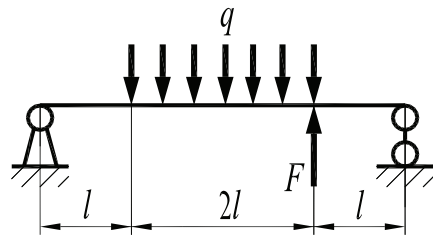
#### Задание 13.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



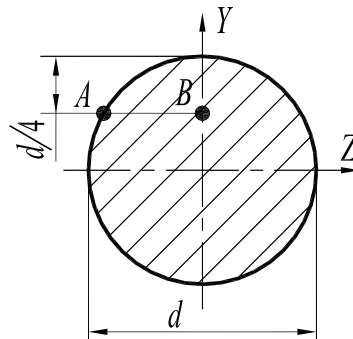
#### Задание 13.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



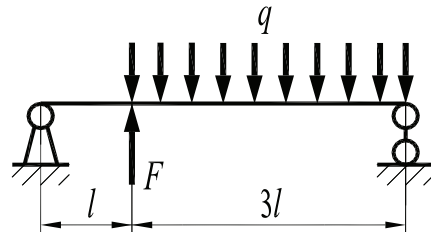
#### Задание 13.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20$  кН·м. Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если диаметр  $d = 200$  мм.



#### Задание 13.4

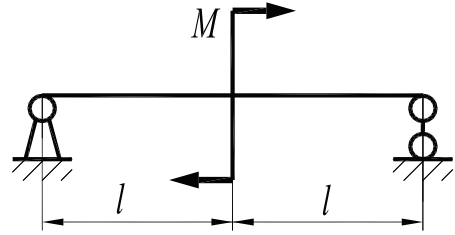
Балка в поперечном сечении — квадрат со стороной  $h$ . Считая известными  $[\sigma]$ ,  $F$ ,  $l$ , определить сторону квадрата  $h$ .



**Билет 14**

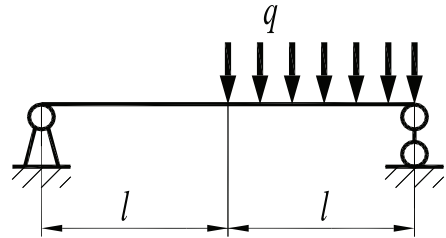
**Задание 14.1**

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



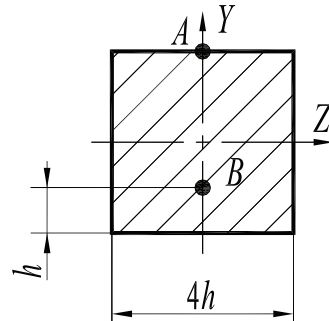
**Задание 14.2**

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 8 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



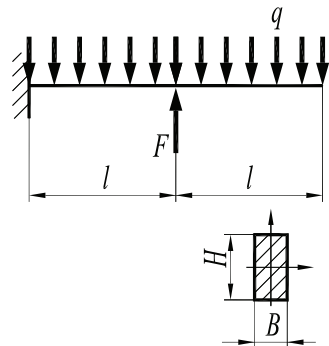
**Задание 14.3**

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $h = 15 \text{ мм}$ .



**Задание 14.4**

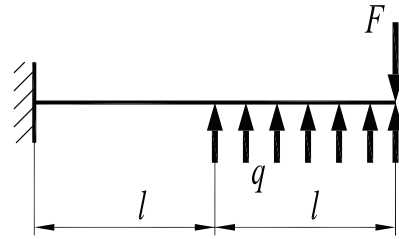
Дана балка прямоугольного сечения  $H \times B = 16 \times 80 \text{ см}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Проверить прочность балки, если  $F = 20 \text{ кН}$ ,  $q = 8 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



### Билет 15

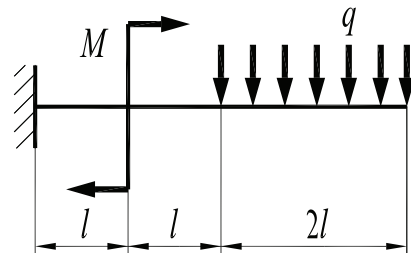
#### Задание 15.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 15$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $l = 0,5$  м.



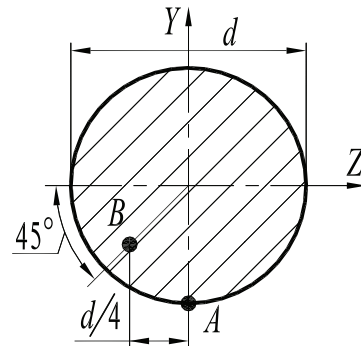
#### Задание 15.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 25$  кН·м,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



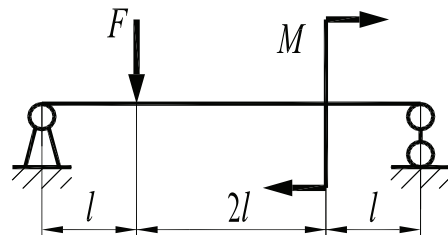
#### Задание 15.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 15$  кН·м,  $d = 100$  мм.



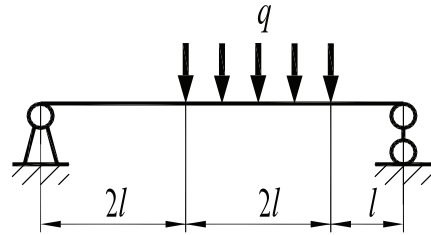
#### Задание 15.4

Дана балка квадратного поперечного сечения  $B \times B = 20 \times 20$  см. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа. Проверить прочность балки, если  $M = 60$  кН·м,  $F = 40$  кН,  $l = 0,5$  м.

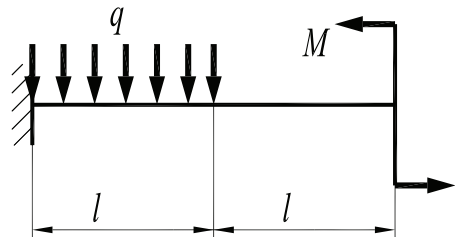


**Билет 16****Задание 16.1**

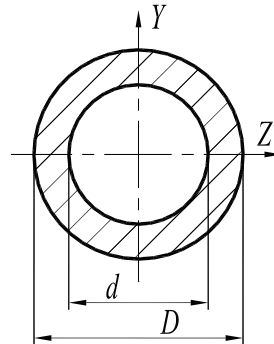
Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $q = 40 \text{ кН/м}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ .

**Задание 16.2**

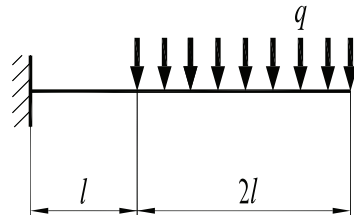
Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .

**Задание 16.3**

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения (кольцо с отношением диаметров  $d/D = 0,7$ ) при допускаемом напряжении материала балки  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$  и изгибающем моменте  $M_z = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , действующем в сечении.

**Задание 16.4**

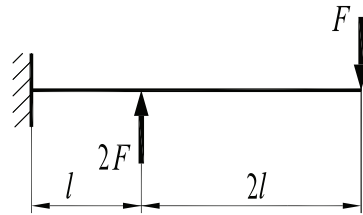
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Определить  $B$ , если  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



### Билет 17

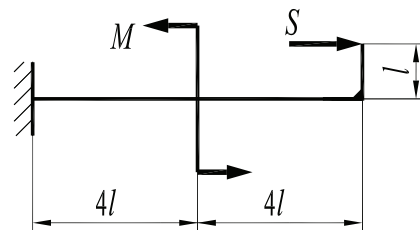
#### Задание 17.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



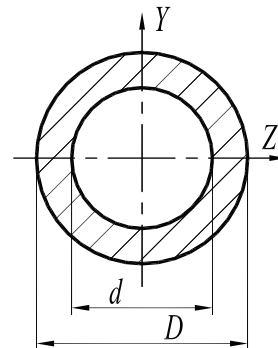
#### Задание 17.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $S = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 0,5 \text{ м}$ .



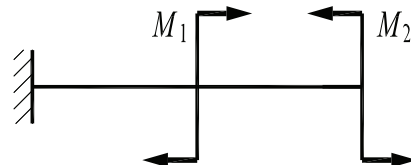
#### Задание 17.3

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения (кольцо с отношением диаметров  $d/D = 0,8$ ) при допустимом напряжении материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  и изгибающем моменте  $M_z = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , действующем в сечении.



#### Задание 17.4

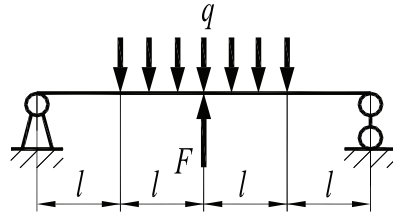
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ . Определить  $B$ , если  $|M_1| = |M_2| = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



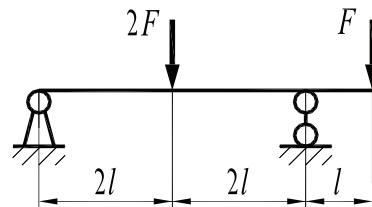


**Билет 18****Задание 18.1**

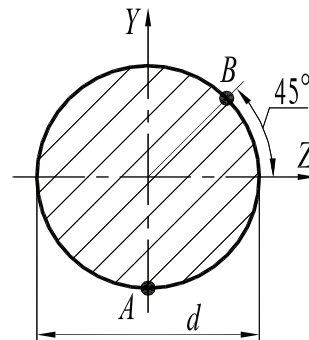
Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $l = 0,5$  м.

**Задание 18.2**

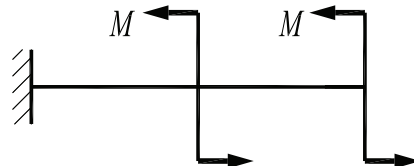
Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м.

**Задание 18.3**

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 20$  кН·м,  $d = 200$  мм.

**Задание 18.4**

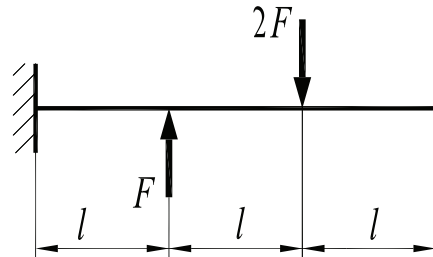
Балка круглого поперечного сечения нагружена изгибающим моментом  $M = 40$  кН·м. Проверить прочность балки, если диаметр  $d = 200$  мм. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа.



### Билет 19

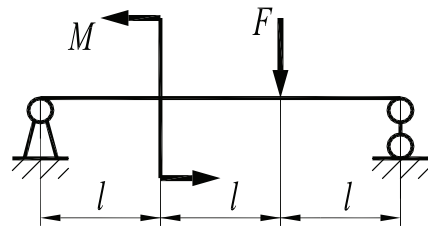
#### Задание 19.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



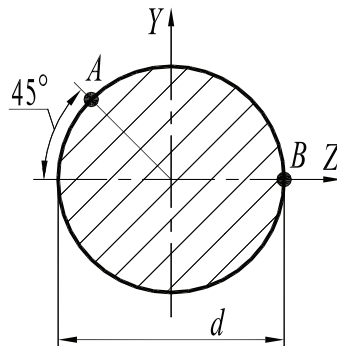
#### Задание 19.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20$  кН·м,  $F = 10$  кН,  $l = 0,5$  м.



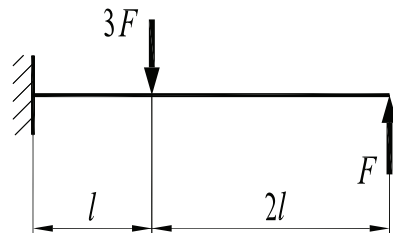
#### Задание 19.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 20$  кН·м,  $d = 120$  мм.



#### Задание 19.4

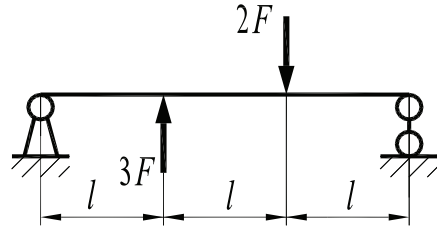
Балка круглого поперечного сечения нагружена силами  $F = 10$  кН, размер  $l = 0,4$  м. Определить диаметр поперечного сечения  $d$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 180$  МПа.



## Билет 20

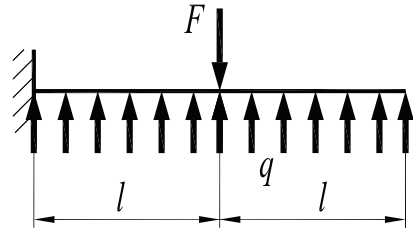
## Задание 20.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



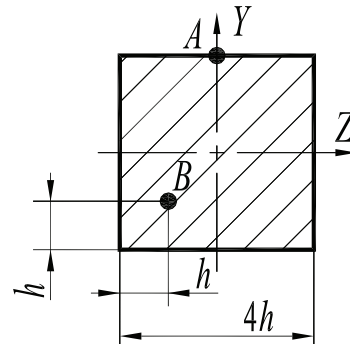
## Задание 20.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



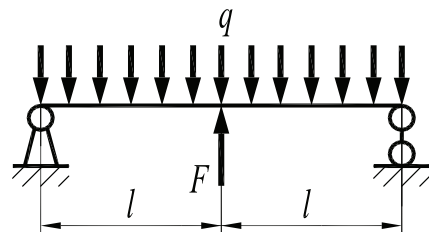
## Задание 20.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 12$  кН·м,  $h = 15$  мм.



## Задание 20.4

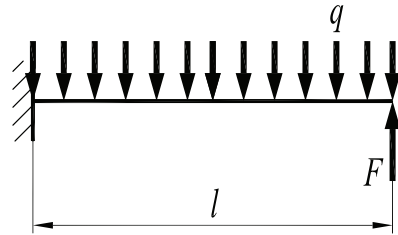
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B = 12$  см. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Проверить прочность балки, если  $F = 10$  кН,  $q = 8$  кН/м,  $l = 1$  м.



## Билет 21

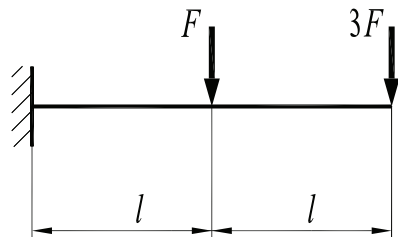
### Задание 21.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 15$  кН/м,  $l = 2$  м.



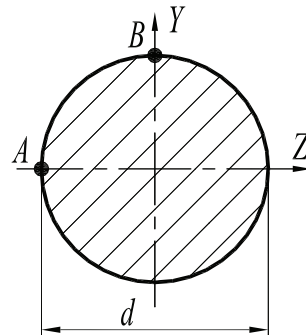
### Задание 21.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м.



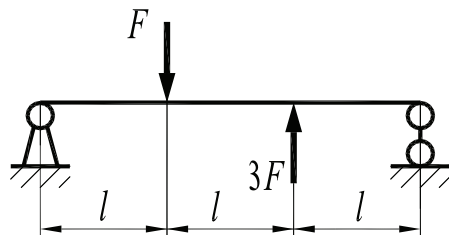
### Задание 21.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 10$  кН·м,  $d = 120$  мм.



### Задание 21.4

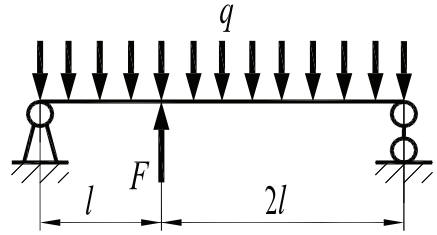
Балка круглого поперечного сечения нагружена силами  $F = 10$  кН, размер  $l = 1$  м. Определить диаметр поперечного сечения  $d$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 180$  МПа.



**Билет 22**

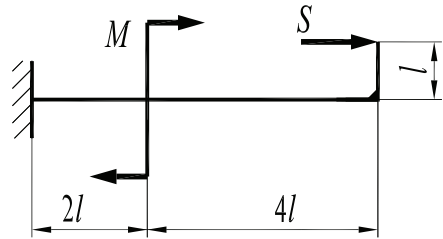
**Задание 22.1**

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



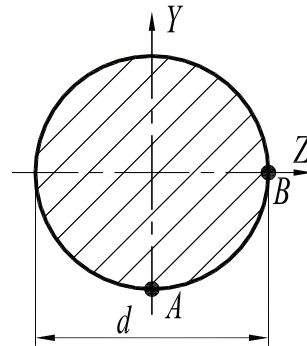
**Задание 22.2**

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 20$  кН·м,  $S = 200$  Н,  $l = 0,1$  м.



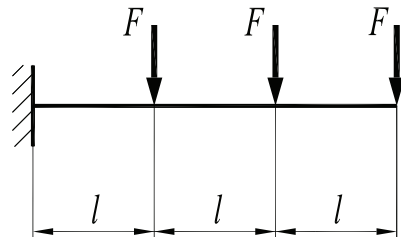
**Задание 22.3**

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 20$  кН·м,  $d = 120$  мм.



**Задание 22.4**

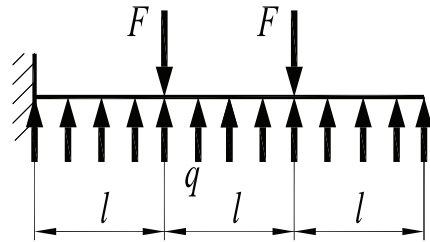
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить  $B$ , если  $F = 5$  кН, размер  $l = 0,4$  м.



### Билет 23

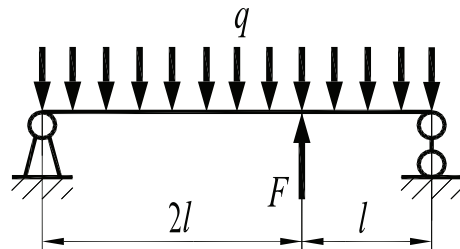
#### Задание 23.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



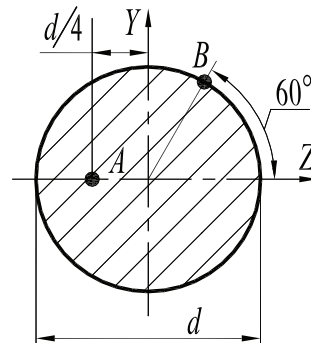
#### Задание 23.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



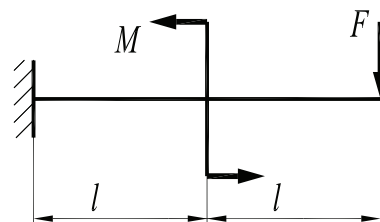
#### Задание 23.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_Z = 20$  кН·м,  $d = 200$  мм.



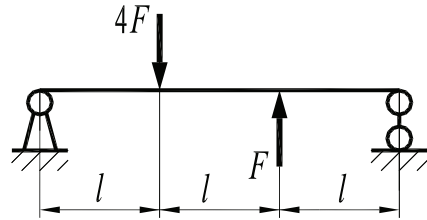
#### Задание 23.4

Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа. Определить  $B$ , если  $M = 10$  кН·м,  $F = 10$  кН,  $l = 0,5$  м.

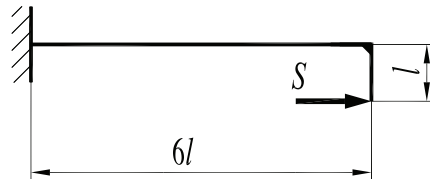


**Билет 24****Задание 24.1**

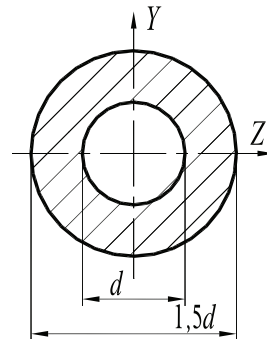
Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м.

**Задание 24.2**

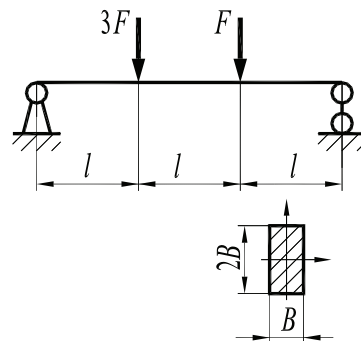
Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $S = 10$  кН,  $l = 0,1$  м.

**Задание 24.3**

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения. Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Действующий в сечении изгибающий момент  $M_Z = 50$  кН·м.

**Задание 24.4**

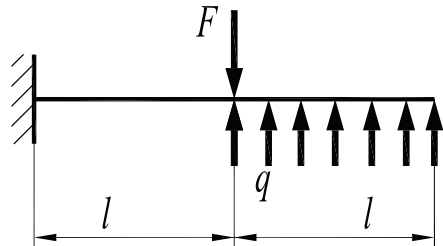
Балка прямоугольного сечения выполнена из стали Ст3. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа. Определить размеры поперечного сечения балки, если  $F = 12$  кН,  $l = 1$  м.



### Билет 25

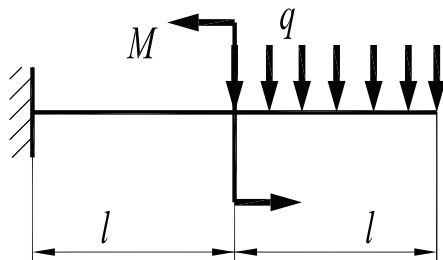
#### Задание 25.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 2$  м.



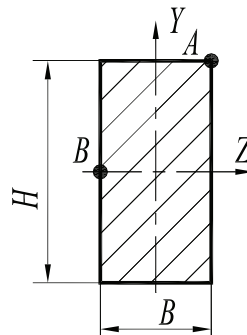
#### Задание 25.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 10$  кН·м,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



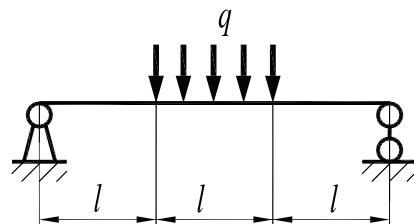
#### Задание 25.3

Определить величину нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если в поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 30$  кН·м,  $H = 200$  мм,  $B = 100$  мм.



#### Задание 25.4

Балка круглого поперечного сечения нагружена распределенной нагрузкой  $q = 20$  кН/м, размер  $l = 1$  м. Определить диаметр поперечного сечения  $d$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа.

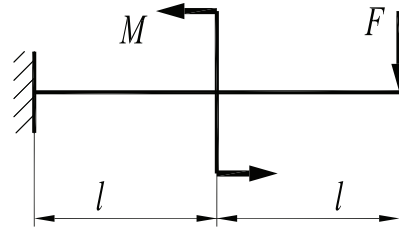




**Билет 26**

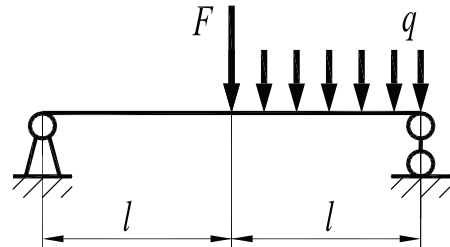
**Задание 26.1**

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .



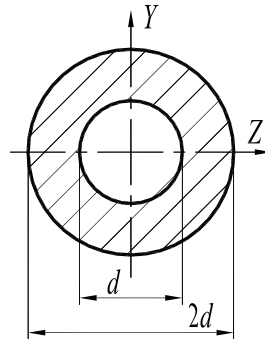
**Задание 26.2**

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 15 \text{ кН}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ ,  $l = 2 \text{ м}$ .



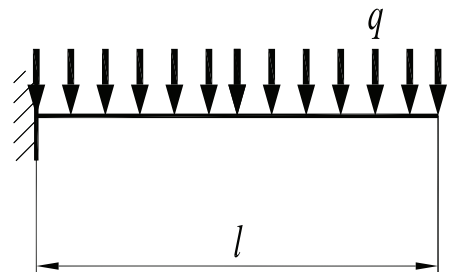
**Задание 26.3**

Для балки определить из расчета на прочность размеры поперечного сечения. Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ . Действующий в сечении изгибающий момент  $M_z = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



**Задание 26.4**

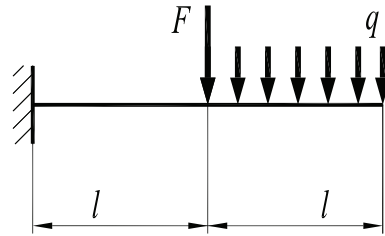
Из условия прочности по нормальным напряжениям определить допускаемое значение нагрузки  $q$ , если размер  $l = 1 \text{ м}$ . Балка круглого поперечного сечения диаметром  $d = 200 \text{ мм}$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .



### Билет 27

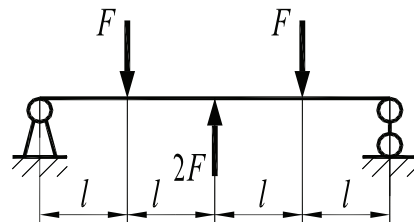
#### Задание 27.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 30$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



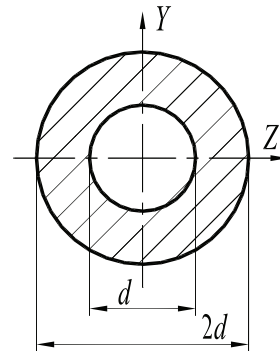
#### Задание 27.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



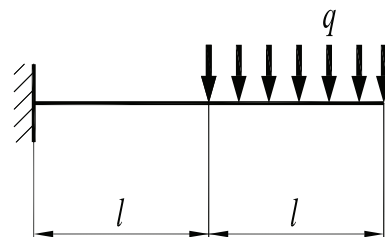
#### Задание 27.3

Балка имеет трубчатое сечение ( $d = 200$  мм). Допускаемое напряжение материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа. Определить из расчета на прочность действующий в сечении изгибающий момент  $M_z$ .



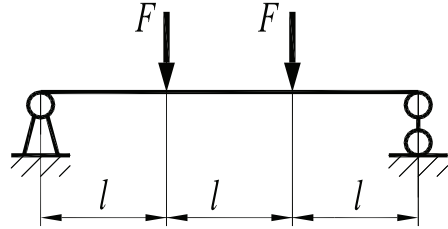
#### Задание 27.4

Из условия прочности по нормальным напряжениям определить допускаемое значение нагрузки  $q$ , если размер  $l = 1$  м. Балка круглого поперечного сечения диаметром  $d = 100$  мм. Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа.

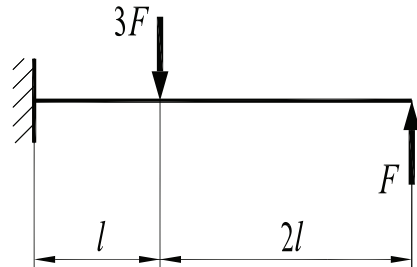


**Билет 28****Задание 28.1**

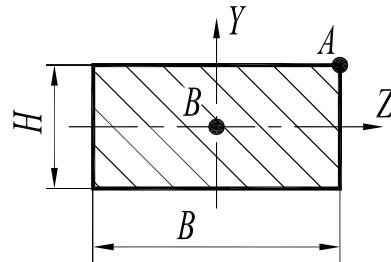
Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.

**Задание 28.2**

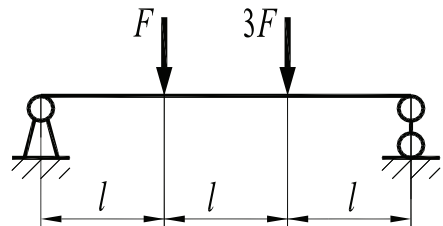
Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 10$  кН,  $l = 1$  м.

**Задание 28.3**

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 20$  кН·м. Определить величины нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если  $H = 100$  мм,  $B = 200$  мм.

**Задание 28.4**

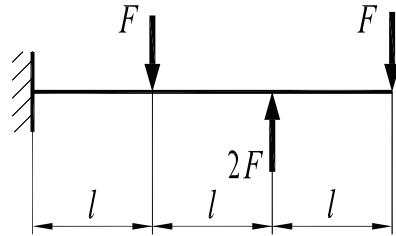
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 140$  МПа. Определить  $B$ , если  $F = 10$  кН,  $l = 0,5$  м.



### Билет 29

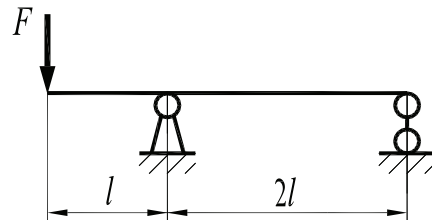
#### Задание 29.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



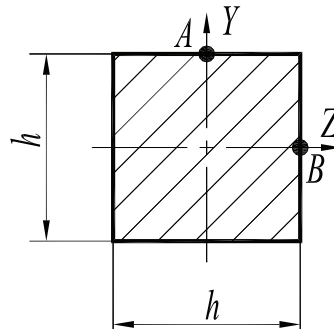
#### Задание 29.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



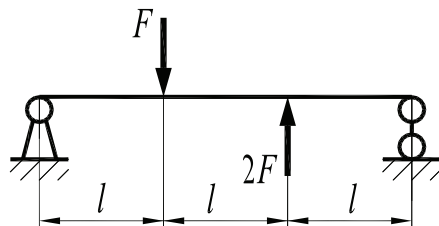
#### Задание 29.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 40$  кН·м. Определить величины нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если  $h = 200$  мм.



#### Задание 29.4

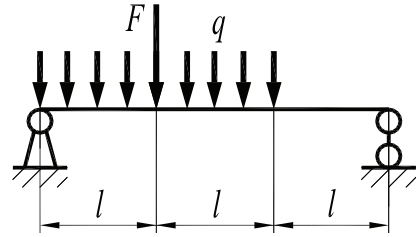
Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить  $B$ , если  $F = 10$  кН,  $l = 0,4$  м.



### Билет 30

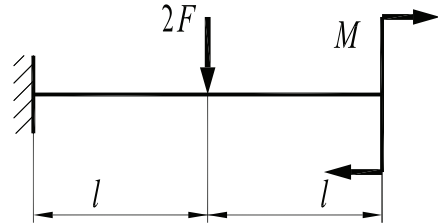
#### Задание 30.1

Построить эпюру внутренних поперечных сил  $Q$  для балки, изображенной на рисунке, если  $F = 20$  кН,  $q = 10$  кН/м,  $l = 1$  м.



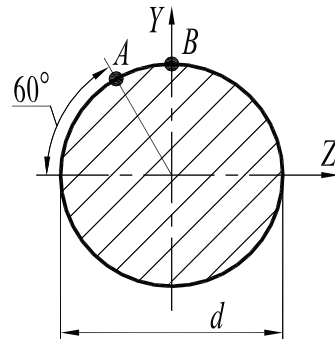
#### Задание 30.2

Построить эпюру изгибающих моментов  $M$  для балки, изображенной на рисунке, если  $M = 10$  кН·м,  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м.



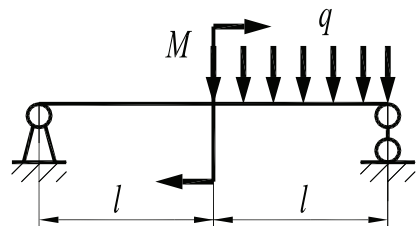
#### Задание 30.3

В поперечном сечении балки действует изгибающий момент  $M_z = 30$  кН·м. Определить величины нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$ , если  $d = 40$  мм.



#### Задание 30.4

Дана балка квадратного поперечного сечения со стороной  $B$ . Допускаемые напряжения материала балки  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить  $B$ , если  $M = 10$  кН·м,  $q = 10$  кН/м,  $l = 0,5$  м.



---

## Рекомендуемый библиографический список

---

Иванов, М. Н. Детали машин / М. Н. Иванов, В. А. Финогенов. — Москва : Высшая школа, 2003. — 408 с. — ISBN 5-06-004063-1.

Иосилевич, Г. Б. Прикладная механика : учебник для вузов / Г. Б. Иосилевич, Г. Б. Строганов, Г. С. Маслов ; под редакцией Г. Б. Иосилевича. — Москва : Высшая школа, 1989. — 351 с. — ISBN 5-06-000090-7.

Детали машин : учебник для вузов / Л. А. Андриенко [и др.] ; под редакцией О. А. Ряховского. — Москва : МГТУ, 2002. — ISBN 5-7038-1773-0.

Механика : сборник задач. В 3 ч. Ч. 2. Кручение. Изгиб / составители В. М. Зиомковский [и др.]. — Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2009. — 32 с.

Механика : сборник задач. В 3 ч. Ч. 3. Сложное сопротивление. Прочность при переменных напряжениях. Кинематика механических передач / составители Л. П. Вязкова [и др.]. — Екатеринбург : УрФУ, 2011. — 40 с.

Прикладная механика : методические указания по выполнению расчетно-графических работ : в 2 ч. / составители Л. П. Вязкова [и др.]. — Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 1997. — Ч. 2. — 28 с.

Степин, П. А. Сопротивление материалов : учебник для немашиностроительных специальных вузов / П. А. Степин. — 8-е изд. — Москва : Высшая школа, 1988. — 367 с.: ил.

Троицкий И. В. Сопротивление материалов : учебное пособие / И. В. Троицкий, В. М. Зиомковский. — Екатеринбург : УГТУ–УПИ, 2008. — 102 с. — ISBN 978-5-321-01274-1.





**ВЯЗКОВА ЛЮДМИЛА ПАВЛОВНА**

Старший преподаватель, кафедра «Металлургические и роторные машины»



**МАЛЬЦЕВ ЛЕВ ВИТАЛЬЕВИЧ**

Доцент, кандидат технических наук, кафедра «Металлургические и роторные машины»



**ПАРЫШЕВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ**

Доцент, кандидат технических наук, кафедра «Металлургические и роторные машины»